

1. Silinder

Olgu otsitav lõppkiirus v . Horisontaalpind pidi andma jõuimpulsi mv , mille õlg silindri massikeskme suhtes oli r . Järelikult $mvr = \frac{1}{2}mr^2\Delta\omega$, kus $\Delta\omega$ on ringsageduse muutus. Libisemine peatub, kui $\omega r - \Delta\omega r = v$, millest $v = \frac{1}{3}\omega r$.

Lahendus II. Impulsimomendi säilib kogu liikumise vältel laua tasapinnas lebava ja nurkkiiruse vektoriga paralleelse telje suhtes: et hõõrdejõu õlg on null, siis impulsimoment säilib. Seega $\frac{1}{2}mr^2\omega = \frac{3}{2}mr^2\frac{v}{r}$, millest $v = \frac{1}{3}\omega r$.

2. Kuul

Kui kuuli tõugatakse jõuga F , siis hõõrdejõud on μF . Et laua ja kuuli pinna libisemise kiirus on võrdne kuuli kiirusega, siis on hõõrdejõu võimsuse ja kasuliku võimsuse suhe μ . Et kuuli inertsimoment alumise punkti suhtes on Steineri teoreemi põhjal $I = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$, siis $A = \mu A + \frac{7}{5}mv^2/2$ millest $A = 0,7mv^2/(1 - \mu)$.

3. Ruut

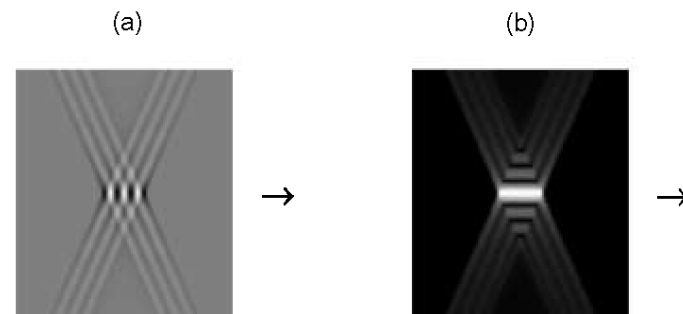
Magnetväli peab olema tasandiga risti ja sestap peab nelja sellise ruudu superpositsioon (kõik ruudud 90° võrra üksteise suhtes pööratud) olema võrdne neljakordse magnetväljaga. Voolude superpositsioon sellisel juhul on null, järelikult on ka magnetväli null.

Edasiarendus. Lahendusideed edasi arendades on näha, et telgsümmeetrilise tasapinnalise plaadi puhul piisab sellest, et sisend- ja väljundklemmid oleksid sümmeetriateljest võrdsel kaugusel: teljel on magnetväli alati null.

4. Koonus

Juuresoleval joonisel on kujutatud koonuses peegeldumisel moodustuva lainevälja (a) ja selle amplituudi (b) momentjaotus koonuse telje lähedases ruumis koonuse telje tasandis. Hallskaalades (a) valgele vastab kõrgeim lainehari ja mustale sügavaim laine põhi; (b) valgele — maksimaalne amplituud ja mustale — nulline amplituud. Laine frondid on (juba sümmeetria põhjal) teljel teljega risti ja kogu laineväli liigub oma keskosas muutumatu püsides piki telge kiirusega $c/\cos(\pi - 2\alpha) = |c/\cos(2\alpha)|$, mis jäeldub peegeldusseadusest ja lihtsast geomeetrisest konstruktsioonist. Kuna laineväli liigub (kui teljest kaugemaid äärepiirkondi mitte vaadelda) kuju muutmata (teatava

küllalt pika vahemaa), siis ilma igasuguste arvutusteta on sama ka faasi- ja rütmakiirus. Et kõik kolm kiirust ületavad c -d (valguse kiirust valemis), ei tähenda signaali ega energia ülevalguskiirusega liikumist ega ole vastuolus erirelatiivsusteooriaga.



5. Tünn

Läheme tünniga seotud taustsüsteemi: vedelik rullub mööda tünni seina alla. Tünni lükkamiseks vajaliku jõu võib leida kui vedeliku ja tünni vahelise jõumomendi (tünni ja maa puutepunkti suhtes) ning raadiuse suhte. Moment on maksimaalne, kui vedelik on kerkinud (polaarkoordinaatides) 90° nurga juurde (kiiruse suurenedes hakkab vedelik alla kukkuma ning lõpuks ka tünniga koos keerlema). Vedeliku ruumala on $w = m/\rho$ ning vedeliku horisontaallõike keskmine pindala $s = w/2h = m/2h\rho$; poolele vedelikule mõjuvat viskoosset jõudu saab hinnata kui $F \approx mg/2 \approx \eta sv/h$ (keskel on kiirus null, servades $\pm v$). Seega $v \approx \rho gh^2/\eta$. Asendades arvud leiame $v \approx 1$ m/s. 90° nurgale vastava jõu leiame momentide taskakaalust, $F_m \approx mg = 9$ N.

6. Vaakummull

Tegemist on klassikalise ülesandega, Landau ja Lifšitši hüdrodünaamika õpik (lk 45, 1986, Moskva) viitab aastasse 1859. Siinne lahendus on märksa lihtsam eelpoolmainitud õpiku lahendusest.

Avaldame vedeliku kineetilise energia funktsioonina mulli raadiuse $r(t)$ muutumise kiirusest $\dot{r} = dr/dt$ arvestades, et pidevuse ja kokkusurumatus tõttu on vedeliku kiirus $v = (\frac{r}{x})^2 \dot{r}$, kus x on kaugus mulli keskpunktist: $K = 4\pi \int_r^\infty \frac{1}{2}(\frac{r}{x})^4 \dot{r}^2 \rho x^2 dx = 2\pi \rho \dot{r}^2 r^3$. Teisest küljest on suures kauguses tehtav rõhumisjõudude töö $A = p\Delta V = \frac{4}{3}\pi p(R^3 - r^3)$, niisiis

$$\rho \dot{r}^2 = \frac{2}{3}p[(R/r)^3 - 1].$$

Otsitav aeg

$$\tau = \int_0^R dr/|\dot{r}| = \sqrt{\frac{3\rho}{2p}} R \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^{-3} - 1}},$$

kus $\xi = r/R$. Tehes asenduse $u = \xi^{-1}$ leiame lõplikult

$$\tau = R \sqrt{\frac{3\rho}{2p}} \Gamma \frac{5}{6} / \Gamma \frac{1}{3} \approx 0,9147R \sqrt{\frac{\rho}{p}}.$$

7. Ülijuhist rõngas

Vaatleme olukorda, kus rõngas on nihutatud tasakaaluasendist (s.o. asendist, kus rõnga ja pilu keskpunktid ühtivad) kaugusele x . Rakendame tsirkulatsiooniteoreemi vaadeldes suvalist üleni toroidi sisemusse jäävat kontuuri. Et $p \ll \mu\Delta$, siis magnetvoo tiheduse tsirkulatsioonis võib ignoreerida kontuuri selle osa panust, mis jääb südamikusse. Pilu tasand on süsteemi sümmeetriatasandiks, seepärast peavad magnetvälja jõujooned läbima pilu risti. Niisiis, kui kontuur läbib pilu rõnga sees, siis $B_i = \mu_0 I/\Delta$, kui aga väljaspool rõngast, siis $B_o \sim \mu_0 I p/\mu\Delta^2 \ll B_i$. Niisiis on pilu ristlõikes magnetväljaga täidetud vaid rõnga sisemuse jääv piirkond pindalaga s . Kontuuri induktiivsus $L = \Phi/I = B_i s/I = \mu_0 s/\Delta$. Kui $x = \sqrt{2}r$, siis piirkonna pindala $s_1 = 2\frac{1}{4}(\pi r^2 - 2r^2) = r^2(\frac{\pi}{2} - 1)$; kui aga $x = 0$, siis $s_0 = \pi r^2$. Seni, kuni kontuur on ülijuhtiv, säilib magnetvoo. Magnetvälja energia $W = \Phi^2/2L$, kus $\Phi = L_0 I_0 = \mu_0 \pi r^2 I_0/\Delta$. Rõngast kauguseni r tõmmates tehakse töö $A = \frac{1}{2}\Phi^2(L_1^{-1} - L_0^{-1}) = \frac{1}{2}\mu_0 \pi r^2 \Delta^{-1} I_0^2 (k - 1)$, kus $k = s_0/s_1 = (\frac{1}{2} - \pi^{-1})^{-1} \approx 5,50$. Märgime, et kontuur on endiselt ülijuhtiv, sest $I_0 k < I_c$. Hetkeks, mil rõngas on liikunud tagasi tasakaaluasendisse, on kogu see töö muundunud kineetiliseks energiaks, $v = \sqrt{2A/m} = I_0 r \sqrt{\mu_0 \pi (k - 1)/m\Delta} \approx 0,73$ m/s. Lõpetuseks veendume, et südamikus väli ei küllastu: $B_1 = \mu_0 I_0 k/\Delta \approx 0,1$ T < B_c .

8. Gaas ja kiirgus

Leiame soojuskiirguse rõhu funtsioonina temperatuurist lähtudes Stefan-Boltzmani seadusest $W = \sigma T^4$. Must sein kiirgab igas suunas footone võrdeliselt kiirgamisnurga koosinusega $\cos \alpha$ ja ruuminurgaga $2\pi \sin \alpha d\alpha$, seega on aja- ja pindalaühiku kohta kiirgava energia diferentsiaal $dW = A 2\pi \cos \alpha \sin \alpha d\alpha$, kus A on normeerimiskonstant, mille leiame Stefan-Boltzmani seadusest: $A = \sigma T^4 / \int_0^{\pi/2} 2\pi \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = \sigma T^4 / \pi$. Edasi paneme tähele, et nurga α all kiirgava footoni impulsi normaal-komponendi ja energia suhe on $c^{-1} \cos \alpha$ ning et impulsi annavad nii sein kiiratud, kui ka sein neelatud footonid. Seega on aja- ja pindalaühiku kohta antud impulsi (s.t. rõhu) diferentsiaal $dp = 4\sigma T^4 c^{-1} \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha$. Integreerides leiame

$p = \int_0^{\pi/2} 4\sigma T^4 c^{-1} \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{4}{3}\sigma c^{-1} T^4$. Kirjutame avaldise rõhkude erinevuse jaoks, kui kolbi hoida paigal: $d(\Delta p) = (nk - \frac{16}{3}\sigma c^{-1} T^3) dT$. Niikaua kui sulgavaldis on nullist erinev, sõltub rõhkude erinevuse märk (ja seega ka kolvi nihkumise suund) dT märgist. Seetõttu $n = \frac{16}{3}\sigma(ck)^{-1} T^3 \approx 7,3 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$.

9. Kollabeeruv gaas

1) Osakesed liiguvad mõttelisest sfäärist sissepoole jääva gaasi gravitatsioonivälja mõjul; kokkutõmbumise käigus see gaasihulk ei muutu, seepärast saame rakendada Kepleri 3. seadust: otsitav aeg τ on pool perioodist sellisel orbiidil, mille pikem pooltelg on pool kaugusest. Raskuskiirendus $g = \gamma \frac{4}{3}\pi r \rho$, poolperiood ringorbiidil raadiusega r $\tau_r = \pi r / \sqrt{rg} = \sqrt{\frac{3}{4}\pi(\rho\gamma)^{-1}}$; Kepleri 3. seaduse põhjal oleks $r/2$ puhul $\tau = \tau_r 2^{-3/2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}\pi(\rho\gamma)^{-1}} \approx 2,1 \cdot 10^{12} \text{ s} \approx 67000 \text{ a}$.

2) Et kokkutõmbumise aeg ei sõltu gaasiosakese kaugusest, siis on igal ajahetkel kõik osakesed samas kokkutõmbumise faasis ning kiirused on võrdelised kaugusega keskpunktist, $v = v_0 r / r_0$. Seepärast $f(v)dv = 4\pi n(t)r^2 N^{-1} dr \propto v^2 dv$, millest $f(v) \propto v^2$. Niisiis $f(v) = v^2 / \int_0^{v_0} v^2 dv = 3v^2 / v_0^3$.

10. Braggi filter

1) Ligikaudne arvutamine: vaatleme, kuidas väheneks amplituud piki filtrit, kui filter oleks lõpmatu. Siis oleks igas vahes edasi ja tagasi leviva laine amplituud võrdne, $a_n = b_n$. Peale $n + 1$ tõket saame edasi leviva laine jaoks seose $a_{n+1} = \sqrt{1 - r} a_n - \sqrt{r} b_{n+1}$, asendades $a_n = b_n$ saame $a_{n+1} = a_n \sqrt{1 - r} / (1 + \sqrt{r}) \approx a_n (1 - \sqrt{r})$, millest $a_n \approx a_0 e^{-n\sqrt{r}}$. Intensiivsus $I_N \approx I_0 e^{-2N\sqrt{r}} \approx 2\%$. Valemi on rakendatav siis, kui läbiva valguse intensiivsus on väike, st. $e^{-2N\sqrt{r}} \ll 1$, sest ainult siis võisime õigustatult lugeda, et $a_n = b_n$.

Täpne arvutus. Olgu n -ndas vahes edasi ja tagasi leviva laine amplituud vastavalt a_n ja b_n . Peale $n + 1$ tõket saame edasi leviva laine jaoks seose $a_{n+1} = \sqrt{1 - r} a_n - \sqrt{r} b_{n+1}$ ning selle tõkke juurest tagasi leviva laine jaoks $b_n = \sqrt{r} a_n + \sqrt{1 - r} b_{n+1}$. Niisiis $b_{n+1} = -a_n \sinh \alpha + b_n \cosh \alpha$, kus $\tanh \alpha = \sqrt{r}$. Edasi leiame $a_{n+1} = a_n \cosh \alpha - b_n \sinh \alpha$. Seega

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = (\hat{E} \cosh \alpha - \hat{J} \sinh \alpha) \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix},$$

kus

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On lihtne näha, et $\hat{J}\hat{J} = \hat{E}$, \hat{E} aga on ühikmaatriks. Maatriksite \hat{E} ja \hat{J} korrutustabel meenutab mõneti ühe ja imaginaarühiku tabelit, vaid üks märk on erinev. See viib mõttele, et ehk kehtib seos $(\hat{E} \cosh \alpha + \hat{J} \sinh \alpha)(\hat{E} \cosh \beta + \hat{J} \sinh \beta) = \hat{E} \cosh(\alpha + \beta) + \hat{J} \sinh(\alpha + \beta)$; vahetu kontroll näitab, et nii see on. Niisiis

$$\begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix} = (\hat{E} \cosh N\alpha - \hat{J} \sinh N\alpha) \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Et $b_N = 0$, siis $b_0 = a_0 \tanh N\alpha$ ning järelikult $a_N = a_0 / \cosh N\alpha$. Otsitav intensiivsus

$$I_N = I_0 [\cosh(N\alpha)]^{-2} \approx [\cosh(N\sqrt{r})]^{-2} \approx 7\%.$$

2) Impulssvalguse puhul on spekter laienenud vastavalt määratuse printsiibile, $\Delta\nu \approx \tau^{-1}$. Samas on filtri peegeldusspektri maksimum hästi kitsas, tähistagu seda laiust $\delta\nu$. Efektiivse peegeldumise puhul ei tohi triipude ja valguse faasi dekorrelatsioon toimuda enne, kui vähemalt $M \approx 1/\sqrt{r} = 100$ triibu edasitagasi läbimisel, s.t. vahemaa $2Ml$ jooksul. Seega $2Ml(\delta\nu/\nu) \approx \lambda/2$. Niisiis $\delta\nu/\nu \approx \lambda/4Ml = 2,5 \cdot 10^{-4}$. Niisiis on peegeldusspekter tõesti märksa kitsam valgusimpulsi spektrist, mille suhteline laius $\Delta\nu/\nu \approx \lambda n / c\tau \approx 5 \cdot 10^{-3}$; et viimane on siiski väiksem peegeldusspektri maksimumide suhtelisest kaugusest $\lambda/2l = 5 \cdot 10^{-2}$, siis toimub peegeldumine vaid ühes maksimumis. Järelikult saab peegeldunud ja langenud valguse suhte leida kui spektrilaiuste suhte $k = \delta\nu/\Delta\nu \approx c\tau/4Mln \approx 5\%$.