

1. Klots purgis

Läheme katseklaasiga seotud süsteemi. Kui katseklaasi hetkekiirendus on \vec{a} , siis inertsijõust tingitud Archimedese jõud on $\rho_v \vec{a}V$. Kehale endale mõjub ka inertsijõud, Newtoni II seadus: $m_{\text{eff}} a' = (\frac{1}{2}\rho_v + \rho_k)V a' = \rho_v aV - \rho_k aV$, jagades V -ga ja integreerides kaks korda üle aja leiame kera nihke jaoks (katseklaasi suhtes) $x = l(\rho_v - \rho_k)/(\frac{1}{2}\rho_v + \rho_k)$, nihe on samuti vasakule.

2. Ketas pöörleb

Et alghetkel moodustavad ketaste puutepunktide suhtelise kiiruse vektorid tsentraalsümmeetrilise konfiguratsiooni, siis on summaarne jõud null, st nende vahel toimiv jõumoment ei sõltu punktist, mille suhtes me selle välja kirjutame. Vajame esimese ketta telje suhtes ($L = \varepsilon \frac{1}{2}MR^2$), kuid arvutada on lihtne teise ketta telje suhtes: $L = \frac{\mu g M}{\pi r^2} \int x dS = \frac{\mu g M}{r^2} \int 2x^2 dx = \frac{2}{3}\mu g M r$. Lõplikult: $\varepsilon = \frac{4}{3}\mu g r R^{-2}$.

3. Õhupall

Deformatsioon $\varepsilon = (R - R_0)/R_0$; vaatleme palli kahe mõteline poole vahelist tõmbejõudu, $F = E\varepsilon S$, kus $S = 2\pi R \cdot (V/4\pi R^2) = V/2R$ ning $V = 4\pi R_0^2 \delta$ on palli kesta ruumala. Leiame $F = EV(R - R_0)/2R_0R = \frac{EV}{2R_0}(1 - \frac{R_0}{R})$. Teisest küljest, $F = p\pi R^2$, mille asendamisel jõuame tulemuseni $p = \frac{2ER_0\delta}{R^2}(1 - \frac{R_0}{R})$.

4. Võrud

Paneme tähele, et kui võru A algkiirus on v , siis tema nurkkiirus $\omega = v/l$. Olgu ühe võru mass m . Läheme massikeskmeiga seotud süsteemi. Seal säilib nii energia K kui impulsimoment L . Võrude kiirused on $-\frac{1}{3}v$, $-\frac{1}{3}v$ ja $\frac{2}{3}v$. Seega $\frac{2K}{m} = \frac{2}{3}v^2 + r^2\omega^2 = \frac{2}{3}v^2(1 + \frac{3}{2}x)$ (kus $x = r^2/l^2$) ja $\frac{L}{m} = lv + r^2\omega = lv(1 + x)$. Piirjuhul, kui võrud A ja C puudutavad, kuid ei löö üksteise vastu, on nende sutheline kiirus puutehetkel null, st süsteem pöörleb kui tervik ja kineetiline energia $2K = L^2/I$, kus I on selle süsteemi inertsimoment massikeskme suhtes. $I = \frac{m}{3}(2l^2 + 4r^2) + 3mr^2 = \frac{2}{3}ml^2(1 + \frac{13}{2}x)$. Et $L^2 = 2KI$, siis $l^2v^2m^2(1 + x)^2 = \frac{2}{3}v^2(1 + \frac{3}{2}x)\frac{2}{3}ml^2(1 + \frac{13}{2}x)$, millest $9 + 18x + 9x^2 = (2 + 3x)(2 + 13x)$, st $30x^2 + 14x - 5 = 0$, $x = \frac{1}{30}(\sqrt{199} - 7)$, $r/l = \sqrt{\frac{1}{30}(\sqrt{199} - 7)} \approx 0,487$.

5. Udu

Kui molekul peab vedelikust väljumiseks ületama energeetilise barjääri U , siis küllastunud auru rõhk $p \propto e^{-U/kT}$. Kui pinna väikesest kõverusraadiusest tingituna energeetiline barjäär kahaneb ΔU võrra, siis logaritmiliselt diferentseerides leiame rõhu muutuse: $\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta U}{kT}$. Kui raadiuse r juures on pinna energia $W = 4\pi\sigma r^2$, siis raadiuse kahanedes Δr -i võrra muutub energia $\Delta W = 8\pi\sigma r \Delta r$ -i võrra. Raadiuse muutus ja molekulide arv ΔN on seotud valemiga $4\pi r^2 \Delta r \rho = \frac{\Delta N}{N_A} \mu$, kus $\mu = 18$ g/mol on vee molaarmass. Seega $\Delta U = \frac{\Delta W}{\Delta N} = \frac{2\sigma\mu}{N_A r \rho}$. Asendades rõhu muutuse avaldisse leiame $\frac{\Delta p}{p} = \frac{2\sigma\mu}{Rr\rho T}$. Märkus: seda valemit tuntakse Kelvini valemi nime all. Arvude asendamisel leiame $\frac{\Delta p}{p} \approx 0,01$, mis vastab suhtelisele niiskusele 101%.

6. Energia kokkuhoiust

Pinge alajaamas on võrdne pingega suvila juures siis, kui koorumust üldse ei ole, U_0 -ga. Radiaatori puhul on kõik pinged samas faasis, $U_0 = U_r + I_r R$, kus R on välisliini takistus; $I_r = P/U_r$, millest $R = (U_0 - U_r)U_r/P_r \approx 3\Omega$ Kui trafo on pingel all, siis vektordiagrammil $\vec{I}R + \vec{U}_k = \vec{U}_0$, millest $I^2 R^2 + U_k^2 + 2\vec{U}_k \vec{I}R = U_0^2$. Arvestades, et $P = \vec{U}_k \vec{I}$ ning otsitav võimsus $P_t = I^2 R$ saab viimase võrrandi kirjutada kujul $P_t = (U_0^2 - U_k^2)R^{-1} - 2P$, millest arvude asendamisel saab $P_t \approx 300$ W. Saja päeva peale koguneb seega ca 730 kWh.

7. Gravitatsioonilained

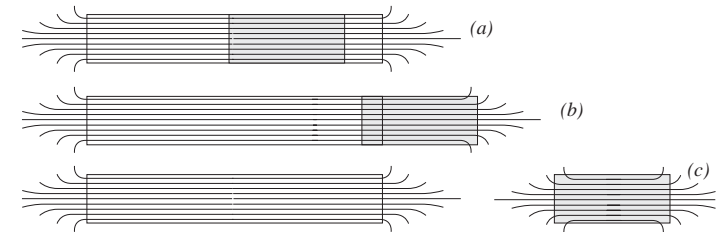
Vaadeldava laengute süsteemi dipoolmoment on kogu aeg null (kui koordinaatide alguspunktiks võtta laengukese). Et aga laengud liiguvad, siis mingi kiirgus ilmselt siiski tekib (et kvadrupoolmoment on nullist erinev, siis seda nimetatakse kvadrupoolkiirguseks). Kumbki laeng kujutab endast dipooli, mis on vastassuunalised ja mille teine tuletis (moodulilt) on $\ddot{d} = \frac{1}{2}ql\omega^2$. Teatud punktis kaugusel r tekitavad need lained elektromagnetlainet, mille elektrivälja E võib hinnata seosega $\varepsilon_0 E^2 c \cdot 4\pi r^2 \approx \frac{1}{6\pi\varepsilon_0} \ddot{d}^2 c^{-3}$, millest $E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \ddot{d} c^{-2} r^{-1}$. Kahe dipooli tekitatud elektriväljad on vastasfaasis, hilinedes faasi $\delta\varphi \approx lk = l\omega/c$ võrra, resultantvälja hinnanguks sobib seega $E_r \approx E\delta\varphi \approx \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} q l^2 \omega^3 c^{-3} r^{-1}$. Siit on edasi lihtne hinnata kiirguse võimsust: $P \approx \varepsilon_0 E_r^2 c \cdot 4\pi r^2 \approx \frac{1}{16\pi\varepsilon_0} q^2 l^4 \omega^6 c^{-6}$. Kui tuua sisse kvadrupoolmoment $Q = \frac{1}{2}ql^2$, siis võib eelmisele valemile anda ka kuju $P \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \ddot{Q}^2 \omega^6 c^{-6}$.

Minnes üle gravitatsioonilainete juurde asendame $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ gravitatsioonikonstandiga G ning kvadrupoolmomenti inertsimomentiga (süsteemi dipoolmomenti muutumise kiiruse vektor on süsteemi impulss, mis on alati konstantne, seetõttu gravitatsiooniline dipoolne kiirgus puudub). Sageduse ω leiame tingimusest $4GM^2/R^2 = MR\omega^2/2$, seega $\omega^2 = 8GM/R^3$. Asendades saame $P \approx G(GM/R^3)^3 M^2 R^4 c^{-6} = G^4 M^5 R^{-5} c^{-6}$.

8. Pulsar

Tuleb leida tähtede vahelise ruumi dielektriline läbitavus funktsioonina Elektrivälja $E = E_0 \exp(i\omega t)$ ringsagedusest ω . Tähtdevahelises ruumis võib elektrone vaadelda kui vabu osakesi, s.t. $m_e \ddot{x} = -E_0 e \exp(i\omega t)$, millest $x = E e m_e^{-1} \omega^{-2}$. Kui elektronid nihkuvad fooni (ioonide) suhtes kaugusele x , siis moodustub plaatkondensaator laengu pindtihedusega $\sigma = -nex$, mis tekitab välja $E_i = -nex/\varepsilon_0 = -(\omega_p/\omega)^2 E_0 \exp(i\omega t)$, kus $\omega_p^2 = ne^2/m_e \varepsilon_0$ (suurust ω_p nimetatakse elektronide plasmaseaduseks). Siit on juba lihtne avaldada $\varepsilon = (E + E_i)/E = 1 - (\omega_p/\omega)^2$. Elektromagnetlainet levimiskiirus $v = d\omega/dk$, kus $(\omega/k)^2 = c^2/\varepsilon$. Järelikult $\omega^2 - \omega_p^2 = c^2 k^2$, millest $\omega d\omega = c^2 k dk$ ning $v = d\omega/dk = c^2 k/\omega = c\sqrt{\varepsilon} \approx c - \frac{1}{2}c(\omega_p/\omega)^2$. Seega on kahe laine kiiruste erinevus $\Delta v = \frac{1}{2}c\omega_p^2(\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2})$ ning vastavalt ülesande tingimusele $c\tau \approx \Delta v T$, kus levimisaeg $T = L/c$. Niisiis $L = c^2 \tau / \Delta v = 2c\tau / \omega_p^2 (\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2}) = 8\pi^2 \nu_1^2 c \tau \omega_p^{-2} \approx 8\pi^2 \nu_1^2 c \tau m_e \varepsilon_0 / ne^2 \approx 1,2 \cdot 10^{19}$ m.

9. Magnet

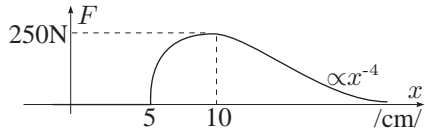


Niikaua kuni magnet on terviga ülijuhi sees, magnetväli (ja tema energia) ei muutu, st jõud on null, vt joonis (a).

Kui magnet on ülijuhi seest kaugemale välja tõmmatud, kuid ots jääb veel ülijuhi sisse, siis magnetvälja energia kasvab lineaarselt nihkega x , $W = SxB^2/2\mu_0$, kus $S = \pi d^2/4$ ja $B = 2B_0$ (püsimagneti keskel on magnetväli kaks korda suurem, kui otste juures; kogu magneti keskel olnud magnetvoog surutakse ülijuhi sisse), vt joonis (b). Seega $F_0 = \frac{dW}{dx} = \pi d^2 B_0^2 / 2\mu_0 = 250$ N.

Kui magnet on vaid natuke otsapidi välja tõmmatud, siis energia kasvab mõnevõrra aegsemalt, sest jõujooned hakkavad püsivalt külgedest välja tulema, vt joonis (b). Kõige parem on toimuvast aru saada, kui mõelda Ampéri jõududele, mis mõjuvad ülijuhi tekitatud magnetvälja poolt püsivalt pinnal voolavatele atomaarsetele vooludele (viimased on alati konstantsed). Küsimus on selles, kuidas käitub ülijuhi magnetvälja radiaalne komponent B_r (loomulik silindrilises koordinaadistikus r, φ, z) ülijuhi serva juurest piki z -koordinaati eemaldumisel. Ilmselt on tegemist iseärasusega, $B_r \propto z^{-\alpha}$, kus $0 < \alpha < 1$ (kui otsa juures $z = 0$). Tõesti, piirkonnas $z < 0$ $B_r \equiv 0$, sest läbi ülijuhi voogu pole. Kui läheneda otsale piirkonnast $z < 0$, siis ühele poole jääb hästi lühike solenoidaalne ülijuhi vool, teisele poole aga pikk (peaaegu terve ülijuh); nende poolt tekitatud B_r komponendid peavad üksteist tasakaalustama, seepärast peab lühike solenoidaalne vool olema hästi tugev, $\alpha > 0$. Teisest küljest, ülijuhi ja magneti vaheline jõud on lõplik; seepärast peab integraal $\int B_r \cdot dz$ koonduuma: $\alpha < 1$. Kõike seda arvesse võttes jõuame järeldusele, et punktis $z = 0$ on $\frac{dF}{dz} = \infty$, edasi kasv aeglustub ja F hakkab lähenema asümptootilisele väärtusele 250 N.

Kui magnet on ülijuhist kaugel, siis on tegemist kahe dipooli interaktsiooniga. Ülijuhi dipoolmoment $d_1 = I_1 S$, kus $I_1 = LB/\mu_0$; magneti dipoolmoment $d_2 = I_2 S$, kus $I_2 = LB/\mu_0$. Dipoolmomentide magnetväli piki telge $b = \mu_0 d/2\pi x^3$, energia magnetväljas $W = bd = \mu_0 d_1 d_2 / 2\pi x^3$. Asendades leiame: $W = lLB^2 S^2 / 2\pi \mu_0 x^3 = \pi d^4 lLB_0^2 / 2\mu_0 x^3$; $F = \frac{dW}{dx} = 3\pi d^4 lLB_0^2 / 2\mu_0 x^4 = 3F_0 d^2 lL / x^4$.



10. Kiudoptika

Kui keskkonna murdumisnäitaja $n(\vec{r}, t) \equiv n(t)$ (ruumiline sõltuvus puudub), siis keskkonnas leviva laine pikkus ei muutu — niisamuti nagu sõltuvuse $n(\vec{r}, t) \equiv n(\vec{r})$ puhul ei muutu laine sagedus. Sellise järelduseni jõudmiseks võib pideva ajalise muutumise asemel kujutada ette diskreetset samm-haaval muutumist: muutuse hetkel laine ruumiline profiil ei muutu, kuid see omanadab uue levikiiruse (ja seega ka sageduse). Võnkeperioodi integraalne muutus $\Delta T = \delta n \lambda_0 / c$, kus δn on fiibris veedetud aja jooksul toimunud murdumisnäitaja muutus.

(a) δn jaoks on kolm diskreetset varianti: $\pm \Delta n$ ja 0. Viimasel juhtumil peab leviv lainehari jõudma läbida fiibri sel ajal, kui n ei muutu, tõenäosuseks on löikude $\tau c - n_0 l$ ja τc suhe. Tõesti, kui märkida nelinurkimpulsi servade ajal startivad laineharjad ristiga, siis vaadeldava laine fiibris leviku ajal startivad laineharjad (optiliselt pikkusel ln_0) peavad jääma kahe risti vahele. Seega muutusele $\Delta \lambda = 0$ ($\delta n = 0$) vastava spektrimaksimumi intensiivsus $I_1 = I_0(1 - \frac{n_0 l}{\tau c}) \approx 47\%$. Muutustele $\pm \Delta n$, st $\delta \lambda = \pm c \Delta T = \delta n \lambda_0 = 16$ nm vastavad on sümmetrilised, $I_2 = I_0 \frac{n_0 l}{2\tau c} \approx 27\%$.

Maksimumide laiust saab hinnata määramatuse printsiibi abil. Kõik kolm lainepikkuse komponenti esinevad teatud pikkusega impulssidena. Keskmisele lainepikkusele vastava impulsi pikkus $L_0 = \tau c - n_0 l$, äärmiste pikkus aga $L_1 = n_0 l$. Paneme tähele, et $L_1 \approx L_0 \approx L = 7,5$ cm. Spektraalne pilt on täpselt sama, mis difraktsioonil pilust (sest mõlemad tekitavad nelinurk-profiili). Seega $\delta k/k = \lambda/L$; et $\delta \lambda/\lambda \approx \delta k/k$, siis $\delta \lambda \approx \lambda^2/L \approx 34$ pm.

(b) Kui vaadeldava laineharja levimise jooksul ei muuda murdumisnäitaja muutumiskiirus märki, siis $\delta n = \pm \frac{\Delta n}{\tau} \frac{l}{c} \langle n \rangle$, kus $\langle n \rangle \approx n_0$ on keskmine murdumisnäitaja levimise aja jooksul. Niisiis tekivad spektris kaks teravat maksimumi, mille lainepikkused on esialgse suhtes nihutatud $\Delta \lambda = c \Delta T \approx \lambda_0 \Delta n \frac{ln_0}{\tau c} \approx 8,5$ nm võrra.

Nende maksimumide laius on määratud kahe efektiga. Esiteks [nagu punkti (a) juureski] määramatuse printsiibist johtuvalt, $\delta \lambda \approx \lambda^2/L_0 = \lambda^2/(\tau c - ln_0) \approx 37$ pm.

Teiseks, $\langle n \rangle$ muutumise vahemiku laius on $(\tau - \frac{ln_0}{c}) \frac{\Delta n}{\tau} = \Delta n(1 - \frac{ln_0}{\tau c})$, mis teeks spektrijoone laiuks $\lambda_0 \Delta n \frac{l}{\tau c} \cdot \Delta n(1 - \frac{ln_0}{\tau c}) = \lambda_0 \Delta n^2 \frac{l}{\tau c} (1 - \frac{ln_0}{\tau c}) \approx 25$ pm. Niisiis on mõlemad efektid samas suurusjärgus ja spektrijoone laiuse hinnanguks võib võtta näiteks nende kahe summa, $\delta \lambda \approx 50$ pm.

Kui laineharja levimise aja jooksul jõuab $\frac{dn}{dt}$ muuta märki, siis on väljuva laine lainepikkus midagi kahe äärmuse vahepealset. Täpne tulemus sõltub kahaneva ja kasvava faasi kestvuse vahest. Et see suurus on ühtlaselt jaotatud, siis moodustub kahe spektri maksimumi vahele platoo. Platoo aluse pindala suhtub graafiku alusesse kogupindalasse nagu $ln_0/\tau c = 8/15 \approx 53\%$.

Kui urdumisnäitaja muutuks ideaalselt perioodiliselt, siis oleks spektril peenstruktuur. Kui võrd laservalguse dekodeerimisvahemaa on väga suur (idealiseeritult lõpmatu), siis on korrelatsiooni tunda ka väljundsignaalis. Kui eelpool sai mainitud ana-

loogiat difraktsiooniga pilul, siis antud olukorras on õigem analoogia difraktsioonivõrega: teatud sisemise struktuuriga impulsid korduvad perioodiga 2τ , mis vastab ruumilisele perioodile $2\tau c$. Niisuguse "difraktsioonivõre" peamaksimumide vaheline kaugus $\delta = \lambda_0^2/2\tau c \approx 8,5$ nm. Reaalselt on nende joonte laius määratud kas laserivalguse või signaali $n(t)$ dekorrelatsiooniajaga.

