

Tartu Ülikool
Tartu Ülikooli Teaduskool

Valter Kiisk

ELEKTRI JA MAGNETISMI ÜLESANDEID

Tartu 2010

Viimati muudetud: 28. märts 2010. a.

Sisukord

1 Elektrostaatika	2
1.1 Gaussi teoreem	2
1.2 Superpositsiooniprintsiip	3
1.3 Elektridipool	3
1.4 Elektrostaatilise välja potentsiaal	4
1.5 Elektrostaatiline energia	5
1.6 Elektrostaatiline jõud	5
1.7 Juhid elektrostaatilises väljas	6
1.8 Kujutismeetod juhtides	7
1.9 Dielektrikud elektrostaatilises väljas	8
1.10 Kujutismeetod dielektikutes	8
1.11 Dielektrikud mittehomogeenses väljas	8
2 Magnetostaatika	9
2.1 Biot'-Savart'i seadus	9
2.2 Tsirkulatsiooniteoreem	9
2.3 Superpositsiooniprintsiip	10
2.4 Ampere'i seadus	10
2.5 Magnetdipool	10
2.6 Magnetväli aines	11
2.7 Ferromagneetikud	11
2.8 Ülijuhid	12
3 Alalisvooluahelad	12
3.1 Kirchoffi seadused	12
3.2 Ekvivalentskeemid	13
3.3 Spetsiaalvõtted	14
3.4 Mittelineaarsed skeemielemendid	14
4 Kondensaatoreid sisaldavad alalisvooluahelad	16
4.1 Energia jäävus	16
4.2 Elektrilaengu jäävus	16
4.3 Karakterne aeg	17
5 Induktoreid sisaldavad alalisvooluahelad	18
5.1 Faraday induktsiooniseadus	18
5.2 Omainduktsioon	18
5.3 Vastastikune induktsioon	19
5.4 Ekstremaalne vool induktoris ja ekstremaalne pinge kondensaatoril	20
6 Vahelduvvooluahelad	20
6.1 Kompleksmeetod	20
6.2 Resonants <i>LC</i> -ahelas	22
7 Laetud osakeste liikumine elektri- ja magnet-	

väljas	22
7.1 Laetud osakeste liikumine vaakumis	22
7.2 Laengukandjate liikumine elektrijuhis	23

Eessõna

Käesolev kirjutis on mõeldud abimaterjaliks gümnaasiumiõpilastele, kes valmistuvad rahvusvaheliseks füüsikaolümpiaadiks. Seega üldjuhul jäävad vaadeldavad ülesanded rahvusvahelise füüsikaolümpiaadi aineprogrammiga (<http://www.jyu.fi/tdk/kastdk/olympiads/>) määratud piiridesse. Kohati on tarvis tunda diferentsiaal- ja integraalarvutuse algeid ning põhioperatsioone vektorite- ja kompleksarvudega. Loodetavasti on kirjutisest kasu ka füüsika eriala üliõpilastele.

Kõik valemid on väljendatud SI ühikutes. Edaspidi kasutame pikemalt kommenteerimata SI ühikute süsteemi kasutamisest tulenevaid konstante $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m (vaakumi dielektriline läbitavus) ja $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m (vaakumi magnetiline läbitavus).

Vektoriaalsete suuruste tähistamiseks kasutatakse "rasvast" kirja (\mathbf{a} , \mathbf{b} , ...). Katus vektori kohal näitab, et tegu on ühikvektoriga (nt $\hat{\mathbf{a}}$ on \mathbf{a} suunaline ühikvektor, pinnanormaal-sihiline ühikvektor on $\hat{\mathbf{n}}$ jne). Vektori \mathbf{a} moodul on tähistatud a , vektoriaalse avaldise, nt $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ moodul on tähistatud $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$. Vektorkorrutist tähistame $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, skalaarkorrutist tähistame $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ehk lihtsalt \mathbf{ab} . Iga vektori saab lahutada etteantud pinnaga ristiolevaks (normaal-) ja paralleelseks (tangentsiaal-) komponendiks. Nendele viitamiseks kasutame vastavalt indekseid n ja τ (nt $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_\tau$).

1 Elektrostaatika

Kõige lihtsamat tüüpi on sellised elektrostaatika ülesanded, kus laengute ruumiline paigutus on etteantud ja küsitakse elektrivälja tugevust laenguid ümbritsevas ruumis. Selliste ülesannete vastused on põhimõtteliselt alati võimalik välja kirjutada kasutades *Coulomb'i seadust* ja *superpositsiooniprintsipi*. Elektrivälja tugevus ruumpunktis \mathbf{r} avaldub niisiis järgmiselt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (1)$$

kus \mathbf{r}_i on punktlaengu q_i kohavektor. Ühikvektor $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ määrab laengu q_i elektrivälja suuna punktis \mathbf{r} . Pideva laengujaotuse korral asendub summa integraaliga, mille väljaarvutamine ei pruugi olla triviaalne. Mitmetel erijuhtudel, mida me edaspidi vaatleme, on võimalik vastus leida märksa lihtsamal viisil.

1.1 Gaussi teoreem

Gaussi teoreemi on mugav selgitada jõujoone mõiste kaudu. Tuletame meelde, et elektrivälja *jõujoonteks* nimetatakse kõveraid, millele elektrivektor \mathbf{E} on igas punktis puutujaks. Lisaks sellele on teada, et 1) jõujooned algavad positiivsetel ja lõpevad negatiivsetel laengutel; 2) punktlaengust lähtuvate jõujoonte arv on võrdeline selle laengu suurusega q ; 3) jõujoonte tihedus (jõujoontega risti asetatud ühikpinda läbivate jõujoonte arv) on võrdeline välja tugevusega E . Püüame need väited koondada ühte valemisse. Ümbritseme punktlaengu q kinnise pinnaga S . Jõujoonte arv, mis läbib pinnaelementi

suurusega ΔS , on ilmselt võrdeline korrutisega $E_n \Delta S$, kus E_n on väljatugevuse komponent pinnanormaali sihis. Pinna S kaudu väljuvate jõujoonte koguarv on niisiis

$$\sum E_n \Delta S \rightarrow \oint_S E_n dS,$$

kus me oleme läinud piirile $\Delta S \rightarrow 0$.¹ Ringike integraali märki peal rõhutab, et integreerimine toimub üle terve kinnise pinna. Kuivõrd jõujoonte koguarv on määratud laengu suurusega q , siis selle integraali väärtus ilmselt ei sõltu pinna S valikust. Integraali väljaarvutamiseks vaatleme erijuhtu, kus pinnaks S on valitud kontsentriiline sfäär raadiusega r . Siis Coulomb'i seadusest $E_n = E = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = \text{Const}$ ja

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Ei ole raske läbi näha, et see võrdus jääb kehtima mistahes laengute paigutuse korral, seega üldiselt

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

kus q_i on laengud, mis on hõlmatud pinnaga S (Q on summaarne laeng). Elektrivälja normaalkomponent $E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ on märgiga suurus. Kui jõujooned väljuvad läbi pinna S , siis $E_n > 0$, vastasel korral $E_n < 0$. Paneme veel tähele, et kui $Q = 0$, siis \mathbf{E} ei pruugi võrduda nulliga, sest \mathbf{E} võib olla tingitud väljaspool vaatlusalust ruumpiirkonda paiknevate laengute poolt, kui aga kogu pinna S ulatuses $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, siis ka $Q = 0$. Gaussi teoreem on eeskätt kasulik peegel-, tsentraal- või telgsümmeetrilise laengujaotusega kehade (tasand, kera, silinder jms) väljatugevuse arvutamisel. Nimetatud juhtumitel on meil sümmeetriakaalutlustest ette teada, milline on elektrivälja vektori siht igas ruumpunktis. Kavalus seisneb pinna S sellises valikus, et pindintegraali arvutamine oleks triviaalne, st et pinna S ulatuses oleks vähemalt tükati $E_n = \text{Const}$.

Märgime, et Coulomb'i seaduse ja Newtoni gravitatsiooniseaduse matemaatilise sarnasuse tõttu on Gaussi teoreem kehtiv ka gravitatsioonivälja jaoks, nimelt

$$\oint_S g_n dS = -4\pi GM,$$

kus M on pinnaga S ümbritsetud aine mass ja \mathbf{g} on gravitatsioonivälja tugevus (st ühikulise massiga kehale mõjuv jõud ehk raskuskiirendus). Miinusemärk on tingitud sellest, et positiivsed massid tõmbuvad.

Ül. 1. Tõestage, et ei ole võimalik tekitada sellist elektrostaatilist välja, milles punktlaeng jääks stabiilsesse tasakaalu. *Vihje.* Tõestus tuleneb otseselt stabiilse tasakaalu definitsioonist.

Ül. 2. Leidke ühtlaselt laetud lõpmatu tasandi poolt tekitatav väli. Laengu pindtihedus on σ .

Vastus: $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$.

Ül. 3. Leidke plaatkondensaatori poolt tekitatav väli ning

¹Sellist integraali nimetatakse vektori \mathbf{E} vooks läbi pinna S . Seda mõistet võib rakendada mistahes vektorväljale. Näiteks kui me uurime vedeliku voolamist ja \mathbf{E} asemel oleks vedelikuosakese kiirusvektor \mathbf{v} , siis integraal $\int v_n dS$ annaks vedelikuvoo (m^3/s) läbi pinna S .

katetele mõjuv jõud pinnaihiku kohta (elektrostaatiline rõhk).² Laengu pindtihedus katetel on $\pm\sigma$.

Vastus: Katetevahelises ruumis $E = \sigma/\varepsilon_0$, väljaspool $E = 0$; $p = \sigma^2/2\varepsilon_0$.

Ül. 4. Leidke elektrilaengu keskmine ruumtihedus atmosfääris, kui on teada, et maapinna lähedal on allapoole suunatud elektrivälja tugevusega ligikaudu 100 V/m, 1500 m kõrgusel aga 25 V/m.

Vastus: $\rho \approx 4,4 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$.

Ül. 5. Leidke peenikese, sirge ja lõpmata pika traadi poolt tekitatav elektrivälja tugevus kaugusel r traadist, kui laengu joontihedus piki traati on λ .

Vastus: $E = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$.

Ül. 6. Tõestage, et ühtlaselt laetud sfääri sisemuses elektrivälja puudub.

Ül. 7. Leidke elektrivälja tugevus kaugusel r ühtlaselt laetud kera keskpunktist. Laengu ruumtihedus on ρ ja kera raadius R .

Vastus:

$$E(r) = \begin{cases} \rho r/(3\varepsilon_0) & \text{kui } r < R \\ \rho R^3/(3\varepsilon_0 r^2) & \text{kui } r \geq R \end{cases}$$

Ül. 8. Leidke elektrivälja tugevus kaugusel r lõpmata pika, ühtlaselt laetud silindri teljest. Laengu ruumtihedus on ρ ja silindri raadius R .

Vastus:

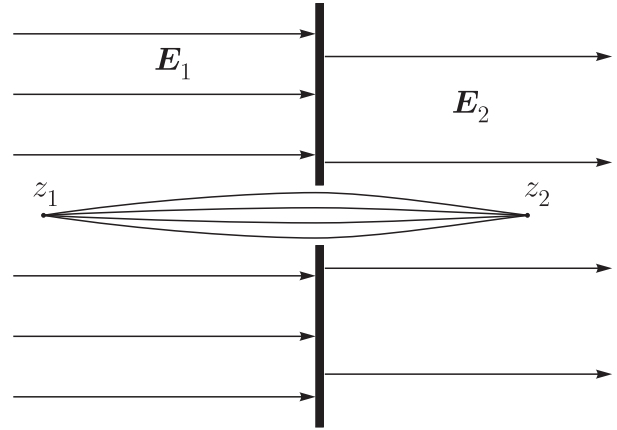
$$E(r) = \begin{cases} \rho r/(2\varepsilon_0) & \text{kui } r < R \\ \rho R^2/(2\varepsilon_0 r) & \text{kui } r \geq R \end{cases}$$

Ül. 9. Õhukeses tasapinnalises elektroodis on ümmargune avaus raadiusega a . Elektroodist ühele poole jäävas poolruumis (avast eemal) on homogeenne elektrivälja \mathbf{E}_1 , teiselpool elektroodi on homogeenne elektrivälja \mathbf{E}_2 (joonis 1). Elektronide kimp on fokuseeritud avause teljel paiknevasse punkti kaugusel z_1 elektroodist. Pärast avause läbimist koondub osakeste kimp teiselpool elektroodi kaugusel z_2 . Osakeste energia $eU_0 \gg eE_1 z_1, eE_2 z_2$ ja $a \ll z_1, z_2$. Näidake, et sellistel tingimustel kehtib "läätsse valem" kujul $1/z_1 + 1/z_2 = (E_1 - E_2)/4U_0$. *Juhtnõör.* Avause vahetus läheduses on väli tugevalt mittehomogeenne. Elektrivälja radiaalsihilise komponendi hindamiseks selles piirkonnas rakendage Gaussi teoreemi lühikesele koaksiaalsele silindrile, mis läbib avast.

1.2 Superpositsiooniprintsiip

Väljade superpositsiooniprintsiip on hästi teada: laengute süsteemi poolt antud ruumpunktis tekitatud elektrivälja tugevus on võrdne nende väljatugevuste vektorsummaga, mida tekitaksid süsteemi kuuluvad laengud üksikuna (valem 1). Mõnikord on kasulik selle erijuht: nullise laengutihedusega ruumpiirkonda võib vaadelda kui kahe võrdvastasmärgilise laengujaotuse superpositsiooni. Siin on teatud analoogia mehaanikaga, kus sarnast ideed rakendatakse õõnsate kehade

²Siin ja edaspidi (kui pole teisiti märgitud) eeldame, et plaatkondensaatori katete mõõtmed on hulga suuremad nende vahekaugusest.



Joonis 1: vt. ül. 9

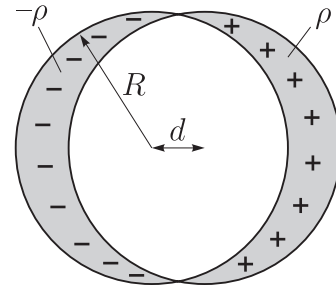
masskeskme leidmisel.

Ül. 10. Kella numbrilauale on fikseeritud punktlaengud suurusega $q, 2q, 3q, \dots, 12q$ ($q > 0$), mis paiknevad vastavatel tunnijaohtidel. Millist aega näitab tunniosuti hetkel, kui ta on paralleelne ja samasuunaline nende laengute poolt tekitatud resultantväljatugevuse vektoriga numbrilaua tsentris? *Vihje.* Kasutage sümmeetriat ning asjaolu, et vektorite summa ei sõltu liidetavate järjekorrast (liitmise kommutatiivsus ja assotsiatiivsus).

Vastus: 15 : 30

Ül. 11. a) Määrake elektrivälja õõnsuses, mis moodustub kahe ühtlaselt laetud kera lõikumisel (joon. 2). Laengu ruumtihedus ühes kera on ρ ja teises $-\rho$, mõlema kera raadius on R ning nende tsentrite vahekaugus on d . b) Lahendage sama ülesanne kui tegemist on kahe lõpmata pika paralleelse silindriga.

Vastus: a) $\mathbf{E} = \rho \mathbf{d}/(3\varepsilon_0)$, b) $\mathbf{E} = \rho \mathbf{d}/(2\varepsilon_0)$ (homogeenne väli).



Joonis 2: vt. ül. 11

Ül. 12. Homogeenselt laetud kera (laengu ruumtihedus ρ) sisemuses on sfääriline õõnsus, mille keskpunkti asukoht kera tsentri suhtes on \mathbf{r}_0 . Leidke elektrivälja õõnsuses.

Vastus: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\rho/3\varepsilon_0)\mathbf{r}_0$ (homogeenne väli).

1.3 Elektridipool

Sageli pakub huvi komplitseeritud laengute süsteemi (nt molekuli) poolt tekitatav elektrivälja suurte kaugustel (so. kau-

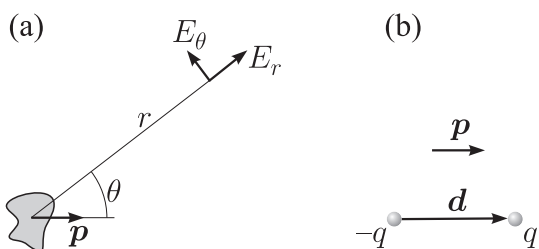
gustel, mis on hulga suuremad süsteemi karaktersest lineaarmõõtmest). Sel juhul on otstarbekas elektrivälja täpne avaldis 1 ritta arendada r järgi, kus r on väljapunkti kaugus laengusüsteemi keskpunktist. On selge, et kui süsteemi kogulaeng $Q = \sum q_i$ on nullist erinev, siis suuritel kaugustel meenutab elektrivälja üsna täpselt punktlaengu välja:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

mille moodul kahaneb pöördvõrdeliselt r^2 -ga. Neutraalse süsteemi ($Q = 0$) puhul peame rittaarenduses arvesse võtma juba liiget, mis kahaneb pöördvõrdeliselt r^3 -ga. Polaarkoordinaatides (joon. 3a) tuleb see järgmine:

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (2)$$

kus suurust $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i$ nimetatakse laengute süsteemi *dipoolmomentiks*. Niisiis \mathbf{p} iseloomustab seda, kui võrd on positiivse ja negatiivse laengujaotuse “masskeskmed” nihkes. Lihtsaimaks laengusüsteemiks, mille väli avaldub vastavalt valemile 2, on kahest võrdvastasmärgilisest punktlaengust ($\pm q$) koosnev süsteem, kus laengute vahekaugus $d \ll r$. Sellist mudelsüsteemi nimetatakse *elektriliseks dipooliks* ja tema dipoolmoment avaldub $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, kus \mathbf{d} on laengust $-q$ laenguni $+q$ tõmmatud vektor (joon. 3b).



Joonis 3: Dipooli elektrivälja polaarkoordinaatides.

Ül. 13. Leidke väli dipooli teljel ning telje keskristsirgel kaugusel r dipoolist. Veenduge, et valemid 2 annavad sama tulemuse. *Vihje.* Kus võimalik, kasutage lähendust $(1+x)^n \approx 1+nx$, kui $x \ll 1$.

Vastus: $\mathbf{E}_\parallel(r) = 2\mathbf{p}/(4\pi\epsilon_0 r^3)$, $\mathbf{E}_\perp(r) = -\mathbf{p}/(4\pi\epsilon_0 r^3)$.

Ül. 14. Tõestage elektrilise dipooli jaoks välja üldavaldis 2. *Juhtnõör.* Kasutage ära eelmise ülesande tulemusi vaadeldes meelevaldse orientatsiooniga dipooli kui kahe sobivalt valitud, risti asetseva dipooli superpositsiooni (st lahutage vektor \mathbf{p} ristuvate komponentide summaks).

Ül. 15. Kirjeldage elektrivälja suuritel kaugustel laetud plaatkondensaatorist!

Ül. 16. Leidke elektrilisele dipoolile \mathbf{p} mõjuv pöördmoment, kui dipool on asetatud välisesse elektrivälja \mathbf{E} .

Vastus: $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$; näeme, et väli \mathbf{E} püüab pöörata vektori \mathbf{p} endaga samasuunaliseks.

Ül. 17. Leidke elektrilise dipooli \mathbf{p} potentsiaalne energia elektriväljas \mathbf{E} .

Vastus: $W = -\mathbf{pE}$ (siin energia nullivoo on välitud nõnda,

et $W = 0$ kui $\mathbf{p} \perp \mathbf{E}$, sellest ka miinusmärk).

Ül. 18. Hinnake polaarseste molekulide pöördvõnkumise sagedust elektriväljas $E = 30$ kV/m. Molekuli võib vaadelda kui jäika hantlikujulist moodustist pikkusega $l \sim 0,1$ nm ja massiga $m \sim 10^{-26}$ kg. Aatomite laengud $\pm q$ võib lugeda mooduli poolsest võrdseks elementaarlaenguga ($1,6 \times 10^{-19}$ C).

Vastus: $\nu \sim \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{qE}{2ml}} \approx 1,5 \times 10^{10}$ Hz.

1.4 Elektrostaatiline välja potentsiaal

Elektrostaatiline väli on *konservatiivne* — töö, mida väli teeb laetud osakese nihutamisel piki suletud kontuuri, on null. Siit järeldub, et töö, mida väli teeb laetud osakese nihutamisel punktist A punkti B , ei sõltu osakese trajektooriga. See asjaolu võimaldab aditiivse konstandi täpsusega defineerida laengu potentsiaalse energia igas välja punktis. Positiivse ühiklaengu potentsiaalset energiat antud ruumpunktis nimetatakse välja *potentsiaaliks*. Kui me lepime kokku lugeda lõpmatuses potentsiaali nulliks, siis punktlaengu q elektrivälja potentsiaal kaugusel r (so. töö, mida elektrivälja teeb, nihutades kaugusele r paigutatud ühiklaengu lõpmatuses) avaldub

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^\infty \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_r^\infty E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Nagu näeme, vastus ei sõltu trajektoori valikust. Siinkohal on jällegi kohane märkida analoogiat gravitatsiooniväljaga. Punktmassi M gravitatsiooniline potentsiaal, so. ühikulise massiga keha potentsiaalne energia, avaldub valemil 3 eeskujul järgmiselt:

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

Miinusmärk on tingitud sellest, et massid tõmbuvad; kui lõpmatuses on potentsiaalne energia loetud võrdseks nulliga, siis lõplikul kaugusel peab ta olema nullist väiksem.

Jaotise 1.1 tulemuste põhjal võime öelda, et valem 3 on rakendatav ka tsentraalsümmeetrilise laengujaotusega kehade (sfäär, kera) potentsiaali arvutamiseks. Punktis, mis asub kõigist laengutest võrdse kaugusel (sfääri tsentris, rõnga teljel vms), on potentsiaal arvutatav samuti valemil 3 järgi. Üldisemal juhul võime kirjutada valemil 1 eeskujul

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Elektrivälja arvutamisel on mõnikord lihtsam tuletada esmalt potentsiaali avaldis $\varphi(\mathbf{r})$ ja siis sellest elektrivälja

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$$

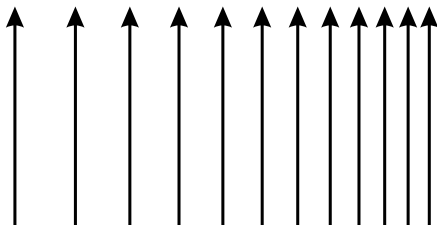
sest potentsiaali arvutamisel tuleb liita skaalareid, elektrivälja arvutamisel aga vektoreid. Kui sümmeetriikaalutlustest on ette teada vektori \mathbf{E} siht (nt rõnga teljel), siis piisab kui arvutame osatuletise ainult selles sihis, ristuvad komponendid tulevad niikuinii nullid.

Ül. 19. Ruumiosa $0 < x < d$ täidab ühtlaselt jaotunud elektrilaengu tihedusega ρ ($\rho > 0$); laengutihedus ruumiosas

$-d < x < 0$ on $-\rho$. Piirkondades $-\infty < x < -d$ ning $d < x < \infty$ laeng puudub. Piirkonnas $x > d$ liigub elektron massiga m ja laenguga $-e$, selle kiirusvektor on suunatud otse laetud kihile. Millise minimaalse algkiiruse puhul suudab elektron veel läbida laetud kihid?

Vastus: $v_0 = d\sqrt{2\rho e/(\varepsilon_0 m)}$.

Ül. 20. Kas on võimalik tekitada elektrostaatiliselt välja, mille jõujooned on kujutatud joonisel 4?



Joonis 4: vt. ül. 20

Ül. 21. Näidake, et ühtlaselt laetud sfääri sisemuses on potentsiaal konstantne ja võrdne sfääri enese potentsiaaliga.

Ül. 22. N ühesugust elavhõbedatilkka on laetud ühesuguse potentsiaalini φ_0 . Missuguseks kujuneb suure elavhõbedatilga potentsiaal kõigi väikeste tilkade liitumisel (tilgad lugeda kerakujulisteks)?

Vastus: $\varphi = \varphi_0 N^{2/3}$.

Ül. 23. Tuletage elektrilise dipooli välja potentsiaali avaldis.

Vastus: $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\hat{\mathbf{r}}/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$.

Ül. 24. Kondensaator on moodustatud kahest kontsentrisest metallsfäärist, mille vaheline ruum on täidetud õhuga. Viimase läbilöögitugevus on 30 kV/cm. Välise elektroodi raadius on $R = 0,5$ m. Milline tuleb valida sisemise elektroodi raadius, et õnnestuks tekitada võimalikult kõrget potentsiaalide vahet? Leidke viimase arvuline väärtus.

Vastus: $r = 0,25$ m, $U = 3,7 \times 10^5$ V.

Ül. 25. Leidke elektrivälja tugevus laetud rõnga teljel kaugusel x rõnga tasandist. Rõnga raadius on R ning laeng Q on ühtlaselt jaotunud üle rõnga.

Vastus: $E(x) = Qx/[4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}]$.

1.5 Elektrostaatiline energia

Punktlaengute süsteemi $\{q_i\}$ elektrostaatiliselt vastasmõju potentsiaalse energia võib esitada kujul $W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i$, kus φ_i on potentsiaal punktlaengu q_i asukohas, mis on tekitatud kõigi ülejäänud laengute poolt (peale q_i enda). Toodud valem on eriti tulus kui φ_i on ühesugune kõigi laengute jaoks (ühtlaselt laetud sfäär, kondensaator vms).

Ül. 26. Hinnake elektroni raadiust, oletades et elektroni seisumass ($m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg) on tingitud tema laengu elektrostaatilisest energiast ($W = mc^2$). Lihtsaimas mudelis võib lugeda, et elektroni laeng ($-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C) on ühtlaselt jaotunud tema "pinnale".

Vastus: $r = e^2/(8\pi\varepsilon_0 mc^2) \approx 1,4 \times 10^{-15}$ m (märgime, et suurust $e^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2) \approx 2,8 \times 10^{-15}$ m nimetatakse elektroni klassikaliseks raadiuseks).

Ül. 27. Oletades, et plaatkondensaatori energia kandjaks on plaatide vahel olev elektriväli, leidke viimase energiatihe.

Vastus: $w = \varepsilon_0 E^2/2$.

1.6 Elektrostaatiline jõud

Vaatleme siinkohal mõningaid mittetriviaalseid ülesandeid laengutele või laetud kehadele mõjuva elektrostaatiliselt jõu arvutamises. Kahte esimest ideed selgitame näitega.

Ül. 28. Näidake, et tsentraalsümmeetrilise laengujaotusega kerade vahel mõjuv jõud avaldub täpselt samuti nagu punktlaengute vaheline jõud: $F = Q_1 Q_2 / (4\pi\varepsilon_0 r^2)$, kus Q_1, Q_2 on kerade laengud ja r on kaugus nende tsentrite vahel. *Juhtnõör.* 1) Väljaspool kera asuva vaatleja seisukohalt väli ei muutu kui suruda kera kokku punktlaenguks (järelendus Gaussi teoreemist). 2) Kehtib Newtoni III seadus: $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

Ül. 29. Leidke jõud, millega ühtlaselt laetud lõpmata pikk silinder mõjutab ühtlaselt laetud kera. Silindri laeng pikkusühiku kohta on λ , kera laeng on Q ning silindri telje ja kera keskpunkti vaheline kaugus r .

Vastus: $F = Q\lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$.

Ül. 30. Leidke ühtlaselt laetud sfääri pinnale mõjuv elektrostaatiline rõhk, kui laengu pindtihedus on σ . *Juhtnõör.* Võtame vaatluse alla sfääri väikese pinnaelemendi ΔS . Väli E' , mis määrab sellele pinnaelemendile mõjuva jõu, on tekitatud sfääri ülejäänud pindlaengute poolt. Väli, mille tekitab pinnaelement enda vahetus läheduses, on vastavalt ül. 2 lahendusele $\sigma/(2\varepsilon_0)$. Selle välja ja välja E' superpositsiooni tulemusena peab väli sfääri sisemuses saama nulliks.

Vastus: $p = \sigma^2/(2\varepsilon_0)$.

Ül. 31. Leidke jõud, millega ühtlaselt laetud sfääri üks pool mõjub teisele, kui sfääri raadius on R ja laeng Q . *Vihje.* Kasutage ära ül. 30 lahendust ja analoogiat gaasi rõhuga anuma seintele.

Vastus: $F = Q^2/(32\varepsilon_0 R^2)$.

Paljude jõu arvutamise ülesannete puhul on rakendatav mehaanikast tuntud *virtuaalse nihke meetod*. Vaatleme laengute süsteemi, mille konfiguratsioon on kirjeldatav üheainsa koordinaadi x kaudu (ühtlaselt laetud sfääri või silindri raadius, kondensaatori katete vahekaugus vms) ja mille potentsiaalset energiat (või vähemalt selle muutust) me oskame kergesti arvutada (sõltuvana x -st). Leidmaks laengutele mõjuvat jõudu F võime arutleda järgmiselt. Kui mõtteliselt lubada koordinaadil x muutuda Δx võrra jõu F mõjumise suunas, siis süsteem teeks oma potentsiaalse energia W arvel tööd $\Delta A = F\Delta x = -\Delta W$, millest $F = -dW/dx$. Kui süsteemil on rohkem kui üks vabadusaste, siis $F_x = -\partial W/\partial x$ väljendab jõu \mathbf{F} seda komponenti, mis mõjub koordinaadi x sihis. Üldiselt x ei pruugi väljendada süsteemi lineaarset mõõdet, teda võib käsitleda kui *üldistatud koordinaati*. Vastavalt ka F tuleb vaadelda kui *üldistatud jõudu*. Kui x väljendab lineaarset mõõdet, siis F avaldub jõuühikutes; kui x väljendab pöör-

denurka, siis F on jõumoment vastava telje suhtes jne. Virtuaalse nihke meetodi üks põhilisi rakendusi on sellistes ülesannetes, kus on mängus kondensaatori ääre-efektid (vt. ül. 34, 52, 53, 54). See meetod võimaldab need ülesanded lahendada ilma, et oleks tarvis teada elektrivälja ja laengute täpset jaotust.

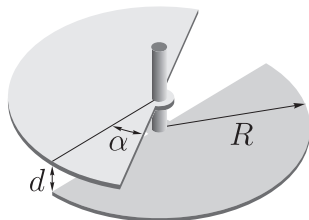
Ül. 32. Lahendage ülesanne 30 virtuaalse nihke meetodil.

Ül. 33. Leidke jõud, mis mõjub elektrilisele dipoolile \mathbf{p} nõrgalt mittehomogeenses väljas $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (st \mathbf{E} muutus on väike dipooli mõõtmete ulatuses).

Vastus: Jõu x -telje sihiline komponent $F_x = \mathbf{p}(\partial\mathbf{E}/\partial x)$.

Ül. 34. Kondensaatori moodustavad kaks poolringi kujulist tasaparalleelset plaati, mis saavad hõrdevabalt pöörelda ühise telje ümber (vt. joon. 5). Plaatide vahekaugus on d ja raadius R ($d \ll R$). Alumine plaat on fikseeritud. Leidke pöördemoment, mis mõjub ülemisele plaadile, kui plaatide kattumisenurk on α ($\alpha \gg d/R$) ja a) plaatidel on laengud $\pm q$; b) plaatidele on rakendatud potentsiaalide vahe U . *Märkus.* Viimasel juhul võib esialgu tekkida mõte võtta $W(\alpha) = C(\alpha)U^2/2$. Sel juhul jõuaksime ekslikule järeldusele, et plaadid tõukuvad ($M < 0$). Tuleb tähele panna, et kui plaatide pöördumise tulemusena nende laeng muutub Δq ($= U\Delta C$) võrra, siis potentsiaalide vahet säilitav vooluallikas teeb oma siseenergia arvel tööd $U\Delta q$. Seega W sisse tuleks arvata ka vooluallika siseenergia. Teine võimalus on ühendada vooluallikas mõtteliselt kondensaatori küljest lahti (säilitades plaatidel olevad laengud), sest plaatide vahel mõjuv jõud on määratud ainult antud hetkel nendel olevate laengutega.

Vastus: a) $M = q^2 d / (\varepsilon_0 \alpha^2 R^2)$; b) $M = \varepsilon_0 R^2 U^2 / (4d)$.



Joonis 5: vt. ül. 34

1.7 Juhid elektrostaatilises väljas

Seni me vaatlesime selliseid ülesandeid, kus laengute paigutus ruumis oli etteantud ja fikseeritud. Viies elektrostaatilises väljas juhi või dielektriku, peame arvestama laengute ümberpaiknemisega aine sisemuses välja toimel. Nendeks laenguteks on juhtides vabad laengukandjad (mis võivad liikuda kogu juhi ulatuses) ja dielektrikutes aatomitega seotud elektronid (mida võib välja rakendamiseks nihutada kõrvale tasakaaluasendest — ainet polariseerida). Sellistes ülesannetes on harilikult teada laengute paigutus väljaspool juhti või dielektrikku, laengute paigutus aines on aga tundmatu.

Juhtidel on elektrostaatika seisukohalt rida huvitavaid omadusi, mis tulenevad vabade laengukandjate olemasolust.

1. Juhi sees elektriväli puudub. Nullist erineva välja korral hakkaksid vabad laengukandjad juhi sees liikuma ja paigu-

tuksid ümber, kuni nende poolt tekitatav väli kompenseerib parajasti välise välja.

- Ümberpaigutunud laengud kogunevad alati juhi pinnale, mujal on laengu ruumtihedus null.³ See tuleneb eelmisest omadusest ja Gaussi teoreemist. Järeldus: õõnsuse tegemine juhi sisse ei häiri laengute tasakaalu juhi pinnal.
- Kuivõrd väli juhi sees puudub, siis potentsiaal peab olema juhi igas punktis ühesugune. Järelikult juht on ekvipotentsiaalkeha ja juhi pind on *ekvipotentsiaalpind*, st elektriväli on juhi pinnaga igas punktis risti. Tõepoolest, vastasel korral hakkaksid vabad laengukandjad piki pinda nihkuma, kuni saavutatakse tasakaal. Siin on analoogia vedeliku pinnaga, mis on ekvipotentsiaalpinna raskusvälja suhtes, st risti raskuskiirenduse vektoriga.

Juhi pinnale indutseeritud vabade laengute tihedus on määratud resultantväljaga juhi pinna vahetus läheduses (Gaussi teoreemi kaudu). Resultantväli on välise välja ja pindlaengute välja superpositsioon. Pindlaengute välja on üldjuhul keeruline siduda laengute pindtihedusega. Ainult tasapinnalise geomeetria puhul on seos pindlaengute välja normaalkomponendi ja laengutiheduse vahel kergesti leitav Gaussi teoreemi abil. Kui seos pindlaengute välja ja laengutiheduse vahel on leitud, siis jääb üle vaid kirjutada välja tingimus, et resultantväli juhi sees (pinna vahetus läheduses) oleks võrdne nulliga.

Juhile antud lisalaeng jaotub mööda selle pinda nii, et juhi kõik punktid saavutavad sama potentsiaali. Juhi *mahtuvuse* all mõistetakse laengut, mis tõstab juhi potentsiaali ühiku võrra. On kerge veenduda, et kera mahtuvus on $4\pi\varepsilon_0 R$, kus R on kera raadius. Siit me näeme, et juhi mahtuvus kasvab võrdeliselt tema karakterse lineaarmõõtmega. Küllalt massiivse juhi (nt maakera) mahtuvuse võib sageli lugeda lõpmata suureks, st tema potentsiaal on praktiliselt muutumatu laengute lisamisel või eemaldamisel ja selle võib harilikult lugeda võrdseks nulliga. Mahtuvuse arvutamisel tuleb tähele panna, et juhile antud lisalaeng võib indutseerida muutusi ümbritsevates juhtides, see omakorda mõjutab vaadeldava juhi potentsiaali.

Ül. 35. Kaks metallkera raadiustega R_1 ja R_2 asuvad teineteisest kaugusel, mis on palju suurem nende raadiustest. Mõlemal keral on ühesugune laeng q . Missugusteks kujunevad kerade laengud, kui ühendada nad juhtmega?

Vastus: $q_1 = 2qR_1/(R_1 + R_2)$, $q_2 = 2qR_2/(R_1 + R_2)$.

Ül. 36. Lõpmatu ulatusega tasapinnalise juhi kohale kaugusele h juhi pinnast paigutatakse punktlaeng q . Leidke juhi pinnale indutseeritud laengute pindtihedus σ .

Vastus: $\sigma(r) = -qh/(2\pi r^3)$, kus r on juhi pinnapunkti kaugus q -st.

Ül. 37. Metallsfäärile raadiusega r on antud laeng q . Sfäär ühendatakse maapinnaga läbi pika juhtme, mille takistus on R . Leidke vool läbi juhtme alghetkel.

³Juhi pinnale kogunenud laengud moodustavad seal hästi õhukese kihi, kus väljatugevus muutub monotoonselt nullist kuni \mathbf{E} -ni, kus \mathbf{E} on väljatugevus juhi pinna vahetus läheduses väljaspool juhti. Makroskoopilises mõttes võib selle üleminekukihi paksuse lugeda nulliks ja öelda, et väljatugevus muutub hüppeliselt nullist \mathbf{E} -ni. Järgnevas me räägime sageli ühe või teise välja pidevusest või mittepidevusest keskkondade lahuspinnal just selles tähenduses. Kui on tarvis leida nende pindlaengute mõjuvat jõudu, võib keskmiseks väljatugevuseks pindkihis lugeda $\mathbf{E}/2$, nagu selgus ülesande 30 lahendamisel.

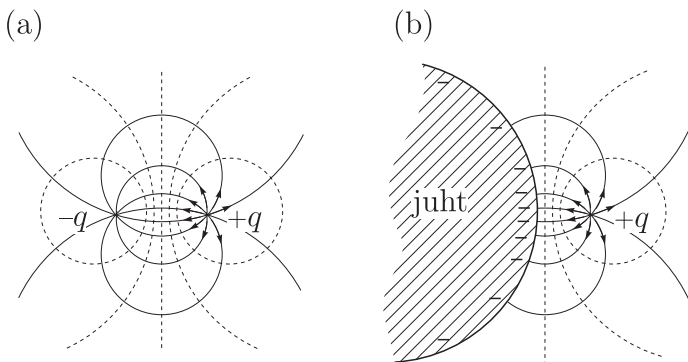
Vastus: $I_0 = q/(4\pi\epsilon_0 rR)$.

Ül. 38. Raadiust R omava metallsfääri sisemuses paikneb metallist kera raadiusega r . Kera ja sfääri keskpunktid ühtivad. Kera on ühendatud maapinnaga pika juhtme abil (juhe läheb läbi sfääri pinnale tehtud väikese avause). Sfääril kera ega maandusega elektrilist kontakti ei ole. a) Sfäärile antakse laeng Q . Kui suur laeng indutseeritakse selle tulemusena kera pinnale? b) Leidke sfääri mahtuvus.

Vastus: a) $q = -Qr/R$; b) $C = 4\pi\epsilon_0 R^2/(R - r)$.

1.8 Kujutismeetod juhtides

Indutseeritud pindlaengute välja määramiseks paneme tähele, et väli väljaspool juhti on määratud ainult juhi potentsiaaliga ning väljaspool juhti paiknevate laengutega, indutseeritud pindlaengute tegelikku paigutust ei pea tingimata teadma. Seda võib illustreerida järgmise lihtsa näitega. Joonisel 6a on kujutatud kahe punktlaengu elektrivälja jõujooned (pidevjoontega) ja ekvipotentsiaalpinnad (kriipsjoontega). Joonisel 6b on üks laengutest asendatud juhiga nii, et juhi pind langeb kokku ühe esialgse ekvipotentsiaalpinnaga ning juhi potentsiaal on fikseeritud nimetatud ekvipotentsiaalpinna vastavale väärtusele. Selle toimingu tulemusena väli väljaspool juhti näeb välja täpselt samasugune nagu esialgne väli. Järelikult indutseeritud pindlaengute väli on antud juhtumil ekvivalentne sobivalt valitud punktlaengu väljaga. *Kujutismeetodi* idee on seega järgmine: asendada indutseeritud pindlaengud juhi sisse asetatud ühe või mitme fiktiivse punktlaenguga q', q'', \dots nii, et juhi pinnal jääks potentsiaal muutumatuks. Laenguid q', q'', \dots nimetatakse laengu q kujutisteks. Pindlaengute väli väljaspool juhti on siis ekvivalentne kujutislaengute väljaga. Sellise protseduuriga juhi sees muidugi väli muutub, kuid see ei paku meile enam huvi, sest juhi sees on väli niigi teada (see on võrdne nulliga). Real juhtudel, kui juhi pind on lihtsa geomeetriaga (tasand, kera, silinder jne), võib kujutislaengute asukoha kergesti ära arvata. Olles postuleerinud kujutislaengute asukoha, saab nende suuruse määramiseks kasutada kahte ekvivalentset tingimust. 1) Võib nõuda, et \mathbf{E} oleks juhi pinnaga igas punktis risti. 2) Võib nõuda, et juhi pind oleks ekvipotentsiaalpind.



Joonis 6: Kujutismeetodi idee juhtide puhul. Pidevate joontega on kujutatud elektrivälja jõujooned, kriipsjoontega ekvipotentsiaalpinnad.

Vaadeldav juht võib olla kas maandatud või isoleeritud. Maandatuks nimetatakse juhti, mis on elektrilises kontak-

tis hästi massiivse juhiga (nt maakeraga), mille potentsiaal on praktiliselt muutumatu (võrdne nulliga). Maandatud juhi laeng võib muutuda (maanduse kaudu). Isoleeritud juhi potentsiaal võib muutuda, kuid tema kogulaeng on muutumatu ja järelikult kujutislaengute summa on samuti fikseeritud (järelsus Gaussi teoreemist). Sellisel juhtumil on tihedeks kujutiseks sageli elektriline dipool.

Indutseeritud pindlaengute tihedus on võrdeline neid esile kutsunud elektrivälja tugevusega. Siit järelsub *superpositsiooniprintsiip*: kui üksik laeng q_1 indutseerib juhi pinna teatud punktis laengutiheduse σ_1 ja üksik laeng q_2 indutseerib samas punktis laengutiheduse σ_2 , siis laengute q_1 ja q_2 koostel indutseeritakse selles punktis laengutihedus $\sigma_1 + \sigma_2$.

Ül. 39. Metallsfääri sisemuses paikneb punktlaeng q kaugusel r sfääri tsentrist. Sfääri raadius on R . Kui suur on sfääri potentsiaal?

Vastus: $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 R)$.

Ül. 40. Lõpmatu tasapinnalise juhi kohal kaugusel h selle pinnast asetseb punktlaeng q . Kui suur jõud sellele laengule mõjub?

Vastus: $F = q^2/(16\pi\epsilon_0 h^2)$.

Ül. 41. Homogeensesse elektrivälja \mathbf{E}_0 asetatakse metallsfäär raadiusega R . Leidke sfääri pinnale indutseeritud laengute tihedus ja elektrivälja sfääri ümbritsevas ruumis. *Vihje.* Pindlaengute poolt tekitatud väli väljaspool sfääri sarnaneb sfääri tsentrisse paigutatud dipooli väljaga. (Dipooli välja potentsiaali avaldis sai leitud ül-es 23.)

Vastus:

$$E_r = \left(2\frac{R^3}{r^3} + 1\right) E_0 \cos \theta, \quad E_\theta = \left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right) E_0 \sin \theta, \\ \sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta,$$

kus θ on nurk vektorite \mathbf{E}_0 ja \mathbf{r} vahel.

Ül. 42. Homogeensesse elektrivälja \mathbf{E}_0 asetatakse metallsilinder raadiusega R ; silindri telg on risti \mathbf{E}_0 -ga. Leidke silindri pinnale indutseeritud laengute tihedus ja elektrivälja silindrit ümbritsevas ruumis. *Juhtnõör.* Lahenduse idee täpselt sama mis eelmises ülesandes, ainult vaadeldaval juhul tuleb kujutislaengutena vaadelda kahte lõpmata lähestikku asetsevat erinimeliselt laetud traati, mis jooksevad piki silindri telge. Nende poolt tekitatava välja määramine toimub samal põhimõttel nagu dipooli puhulgi (ül. 13, 14).

Vastus:

$$E_r = \left(\frac{R^2}{r^2} + 1\right) E_0 \cos \theta, \quad E_\theta = \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) E_0 \sin \theta, \\ \sigma(\theta) = 2\epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

Ül. 43. Laeng q paikneb maandatud metallkera lähedal, kaugusel h viimase keskpunktist. Kera raadius on R . Leidke laengule mõjuv jõud.

Vastus: $F = -\frac{hRq^2}{4\pi\epsilon_0(h^2 - R^2)^2}$. Kujutislaenguks on $q' = -Rq/h$, mis asetseb kaugusel R^2/h kera keskpunktist.

Ül. 44. Lahendage eelmine ülesanne juhul, kui kera on maandamata. *Vihje.* Ülesande 43 lahendust tuleb ainult veidi täiendada.

$$\text{Vastus: } F = -\frac{R^3(2h^2 - R^2)q^2}{4\pi\epsilon_0 h^3(h^2 - R^2)^2}.$$

Ül. 45. Plaatkondensaatori katete vahekaugus on d ning pindala S . Mõlemad plaadid on maandatud. Plaatide vahele, esimesest plaadist kaugusele x viiakse punktlaeng q . Kui suured laengud kogunevad kummalegi plaadile?

$$\text{Vastus: } q_1 = -q(1 - x/d), q_2 = -qx/d.$$

1.9 Dielektrikud elektrostaatilises väljas

Dielektrikute omadused on määratud seotud laengutega (aatomituumad ja aatomite koosseisu kuuluvad elektronid). Kuigi need laengud ei saa oma aatomi piires lahkuda, võivad nad välise elektrivälja toimele nihkuda kõrvale oma tasakaaluasendist. Positiivsed laengud nihkuvad välja suunas, negatiivsed vastassuunas — dielektrik polariseerub.⁴ Kui polarisatsioon on ruumiliselt ühtlane, siis dielektriku sisemuses jääb laengute ruumtihedus endiselt nulliks, pinnale aga indutseeritakse mõnesugune seotud laengute pindtihedus.

Välja kirjeldamiseks dielektrikus on mugav kasutada peale väljatugevuse veel elektrilist induksiooni $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$, kus suhteline dielektriline läbitavus ϵ on dielektriku ainet iseloomustav konstant. Vaakumis $\epsilon = 1$. Elektriline induksioon on sellisel kavalal viisil defineeritud, et ta on määratud ainult vabade laengute jaotusega — ta võtab automaatselt arvesse dielektriku polarisatsiooni. Seega vektori \mathbf{D} normaalkomponent D_n on pidev kahe dielektriku lahutuspinna. Pidev on samuti elektrivälja tugevuse tangentsiaalkomponent E_τ (indutseeritud laengud tingivad ainult normaalsihilise väljakomponendi katkevuse). Gaussi teoreem, esitatuna elektrinihke kaudu, võtab kuju:

$$\oint_S \mathbf{D}_n dS = \sum_i q_i,$$

kus q_i on vabad laengud, mis on hõlmatud pinnaga S .

Erinevalt juhtidest indutseeritud pindlaengute väli ei suuda dielektriku sees välist välja kompenseerida vaid ainult nõrgendab seda (seda nõrgendamist iseloomustabki ϵ). Milliseks väli dielektriku sees kujuneb, sõltub dielektriku kujust ja orientatsioonist välisvälja suhtes. Homogeense välisvälja puhul on paljudel juhtudel (plaat, kera, silinder) mõistlik eeldada, et väli dielektriku sees on samuti homogeenne ning dielektrik polariseerub ühtlaselt. Siis jääb vaid üle kindlaks teha, kas väljatugevuse ja polarisatsiooni suuruse sobiva valikuga õnnestub rahuldada D_n ja E_τ pidevuse nõuet kõikjal dielektriku pinnal. Seejuures tasub tähele panna, et ühtlaselt polariseeritud keha võib vaadelda kui kahe homogeenselt ja võrdvastasmargiliselt laetud ning teineteise suhtes õige veidi nihkes oleva keha superpositsiooni. Elektrivälja arvutamine väljaspool keha toimub siis samal põhimõttel nagu ülesannetes 41 ja 42.

⁴Mikroskoopilisel tasandil võib eristada kolme polarisatsioonimehhanismi. 1) Elektrivälja "venitab laperguseks" aatomite elektronpilved, nõnda et elektronide laengukese nihkub paigast; 2) kui dielektrik koosneb permanentset dipoolmomenti omavatest molekulidest, siis elektrivälja orienteerib need molekulid osaliselt välja sihis; 3)ioonkristallide puhul võib kujutleda, et erinimelistest ioonidest moodustatud alamvõred nihkuvad üksteise suhtes kui tervikud. Makroskoopilises pildis on resultaat (aine polariseerumine) kõigil juhtudel sama ja kirjeldatav ühesugusel viisil.

Lahendi tõepärasuse kontrollimiseks tasub veenduda, et $\epsilon = 1$ puhul saadakse sama tulemus mis vaakumi jaoks.

Ül. 46. Plaatkondensaatori katete vahekaugus on d , pindala S ja katete vahel on dielektrik, mille dielektriline läbitavus on ϵ . a) Leidke kondensaatori mahtuvus; b) leidke jõud, mis mõjub kondensaatori katete vahel, kui neile on rakendatud potentsiaalide vahe U (võib eeldada, et mehaaniline kontakt dielektriku ja katete vahel puudub).

$$\text{Vastus: } a) C = \epsilon\epsilon_0 S/d; b) F = \epsilon^2\epsilon_0 S U^2 / 2d^2.$$

Ül. 47. Ühtlase paksusega dielektrikust plaat on asetatud homogeensesse välja \mathbf{E}_0 , millega plaadi pinnanormaal moodustab nurga θ . Dielektriku suhteline läbitavus on ϵ . Leidke elektrivälja plaadi sees ja plaadi pinnale indutseeritud seotud laengute tihedus.

$$\text{Vastus: } E_{\parallel} = E_0 \sin \theta, E_{\perp} = E_0 \cos \theta / \epsilon, \sigma = E_0 \cos \theta (\epsilon - 1) / \epsilon\epsilon_0.$$

Ül. 48. Pikk dielektrikust silinder asetatakse homogeensesse välja \mathbf{E}_0 . Leidke väli silindri sees, kui silindri telg on: a) paralleelne \mathbf{E}_0 -ga; b) risti \mathbf{E}_0 -ga.

$$\text{Vastus: } a) \mathbf{E} = \mathbf{E}_0; b) \mathbf{E} = 2\mathbf{E}_0 / (\epsilon + 1).$$

Ül. 49. Dielektrikust kera raadiusega R asetatakse homogeensesse välja \mathbf{E}_0 . Leidke väli kera sees ning indutseeritud pindlaengute tihedus kera pinnal.

$$\text{Vastus: } \mathbf{E} = \frac{3\mathbf{E}_0}{2 + \epsilon}, \sigma(\theta) = 3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

1.10 Kujutismeetod dielektrikutes

Vaatleme kahte kokkupuutes olevat dielektrilist keskkonda. Asetame keskkonda 1 laengu q . Selle toimele indutseeritakse dielektrikute lahutuspinna seotud laengute mõnesugune jaotus σ . σ on määratud summaarse väljaga (Gaussi teoreemi kaudu), mis omakorda sõltub σ -st. Arvestamiseks indutseeritud laengute mõju keskkonnas 1, asendame nad sobivalt valitud kujutislaenguga q' (nagu tegime juhtide puhul). Keskkonnas 2 asuva vaatleja seisukohalt ei saa me aga laengut q' säilitada. Siin oletame hoopis, et laengute σ ekraaneeriv toime on selline, nagu oleks laengu q asemel laeng q'' . Nõudes, et suurused E_τ ja D_n oleksid pidevad dielektrikute lahutuspinna, saame q' ja q'' määramiseks lineaarse võrrandisüsteemi.

Ül. 50. Kahe lõpmatu ulatusega tasapinnalise dielektriku lahutuspinna lähedal kaugusel h on punktlaeng q . Dielektrikute läbitavused on ϵ_1 ja ϵ_2 . Leidke väli kummaski dielektrikus.

$$\text{Vastus: } \mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2, \mathbf{E}_2 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1, q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, q'' = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q. \text{ Siin } r_1 \text{ on väljapunkti kaugus laengust } q \text{ ja } r_2 \text{ väljapunkti kaugus laengu } q' \text{ kujutisest } q'.$$

1.11 Dielektrikud mittehomoogeenses väljas

Mittehomoogeenses väljas mõjub dielektrikule jõud, mis tõmbab teda tugevama välja piirkonda (polaarsete molekulide korral võib veenduda selles ül. 33 näitel). Kui väli on nõrgalt mittehomoogeenne (st muutub vähe dielektriku mõõtmete ula-

tuses), siis dielektrikku võib lugeda ühtlaselt polariseerituks ning lihtsamatel juhtudel (nt kera puhul) saab dielektrikule mõjuva jõu otseselt arvutada. Enamus vaadeldavasse rubriiki kuuluvaid ülesandeid on seotud kondensaatoritega, mille puhul välja mittehomogeensus avaldub kondensaatori äärtel. Sellest hoolimata on sellised ülesanded lahendatavad virtuaalse nihke meetodi abil analüüsimata elektrivälja detailset käitumist äärtel.

Ül. 51. Leidke jõud, mis mõjub dielektrikust kerale mittehomogeenses väljas $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Kera raadius on R ning materjali dielektriline läbitavus ε . *Vihje.* Vt. ül. 49 ja 33.

Vastus: Jõu x -telje sihiline komponent

$$F_x = 2\pi\varepsilon_0 R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{\partial}{\partial x} E^2.$$

Ül. 52. Plaatkondensaator on sukeldatud elektrit mittejuhtivasse vedelikku, mille dielektriline läbitavus on ε . Leidke plaatide vahel mõjuv jõud, kui plaatide pindala on S , vahekaugus d ning laeng $\pm Q$.

Vastus: $F = -Q^2/(2\varepsilon\varepsilon_0 S)$; tulemus näitab, et polariseeritud dielektrik avaldab elektroodidele täiendavat jõudu ja ε võib tõlgendada kui suurust, mis näitab mitu korda on dielektrikusse asetatud laetud kehade vahel mõjuv elektrostaatiline tung väiksem kui see oleks vaakumis.

Ül. 53. Leidke jõud, millega dielektrikust plaati tõmmatakse plaatkondensaatori katete vahele, kui plaadi laius on a , plaadi paksus d on võrdne katete vahekaugusega, plaadi dielektriline läbitavus on ε ning kondensaatorile on rakendatud pinge U .

Vastus: $F = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 a U^2 / (2d)$.

Ül. 54. Plaatkondensaatori moodustavad kaks vertikaalset tasaparalleelset plaati, mille vahekaugus on d . Plaatide vahele on rakendatud pinge U . Kondensaator asetatakse alumist serva pidi vedelikku, mille dielektriline läbitavus on ε ja tihedus ρ . Kui kõrgele tõuseb vedelik kondensaatori plaatide vahel? Pindpinevusega mitte arvestada. *Juhtnõör.* Tasakaaluasendis $F_x = 0$ ehk $\partial W / \partial x = 0$ (teisisõnu, süsteemi potentsiaalne energia omab miinimumi). Antud juhul tuleb W sisse arvata ka raskusjõu potentsiaalne energia.

Vastus: $h = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2 / (2d^2 \rho g)$.

2 Magnetostaatika

2.1 Biot'-Savart'i seadus

Magnetostaatika üheks põhiliseks ülesandeks on etteantud staatiliste voolude poolt genereeritud magnetvälja määramine. Kuigi magnetvälja algallikad on liikuvad laengud, väljendatakse magnetostaatika põhiseadused enamasti voolude kaudu. Iga vool on kirjeldatav voolukontuuriga ja selles voolava voolu tugevusega I . Kui me tähistame elementaarnihet piki voolukontuuri voolu suunas $d\mathbf{l}$ -ga, siis suurust $I d\mathbf{l}$ nimetatakse *vooluelemendiks*. Vooluelemendil on magnetostaatikas samasugune roll nagu punktlaengul elektrostaatikas. Coulomb'i seaduse analoogiks võib lugeda *Biot'-Savart'i seadust*, mille kohaselt vooluelement $I d\mathbf{l}$ annab magnetinduktsiooni kaugusel

r panuse

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Meelevaldse voolude konfiguratsiooni poolt tekitatava välja saab leida Biot'-Savart'i seaduse ning superpositsiooniprintsiibi abil.

Kuivõrd vool on laengute suunatud liikumine, siis Biot'-Savart'i seadusest järeldub ka kiirusega \mathbf{v} liikuva punktlaengu q väli:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (4)$$

Ül. 55. Leidke magnetiline induktsioon ringvoolu teljel kaugusel x ringvoolu tasandist. Voolutugevus kontuuris on I ja kontuuri raadius R .

Vastus: $B(x) = \frac{1}{2}\mu_0 R^2 I / (R^2 + x^2)^{3/2}$.

2.2 Tsirkulatsiooniteoreem

Kuna magnetlaenguid looduses ei eksisteeri, siis Gaussi teoreem magnetvälja jaoks on järgmine:

$$\oint_S \mathbf{B}_n dS = 0.$$

See tähendab, et magnetilise induktsiooni jooned on kinnised (ei alga ega lõpe kusagil). Näiteks vooluelemendi poolt tekitatava magnetilise induktsiooni jooned kujutavad enesest koaksiaalseid ringjooni, nagu on kerge järeldada Biot'-Savart'i seadusest (tuletame meelde vektorkorrutise definitsiooni).

Olgu Γ mingi suletud kontuur. Tähistame $d\mathbf{l}$ -ga elementaarnihet piki kontuuri ja \mathbf{B}_l kaudu vektori \mathbf{B} projektsiooni vektorile $d\mathbf{l}$. Vektorvälja \mathbf{B} *tsirkulatsiooniks* piki kontuuri Γ nimetatakse joonintegraali

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B}_l d\mathbf{l}.$$

Tsirkulatsiooni mõistet on jällegi mugav illustreerida vedeliku voolamise näitel. Vedelikuosakese kiirusvektori tsirkulatsiooni erinevus nullist tähendaks, et vedelikus toimub keeriseline liikumine e. turbulents.

Kuna magnetilise induktsiooni jooned moodustavad kinniseid kõveraid, siis on selge, et \mathbf{B} tsirkulatsioon piki suletud kontuuri peab olema üldiselt nullist erinev. Seda väljendab *tsirkulatsiooniteoreem* ehk *koguvooluseadus*, mille me esitame siin ilma tuletuseta:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B}_l d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i,$$

kus summeeritakse üle kõikide voolude I_i , mis on hõlmatud kontuuriga Γ . Voolusid I_i tuleb käsitleda algebraliste suurusena. Need voolud, mille suunad on seotud ümberkäigusuunaga kruvireegli kaudu, tuleb võtta positiivse märgiga. Kontuur Γ on otstarbekas niimoodi valida, et joonintegraali arvutamine oleks triviaalne, st et vähemalt tükati oleks $\mathbf{B}_l = \text{Const}$. Tsirkulatsiooniteoreem võimaldab mõningatel lihtsatel juhtudel (sirgvoolu, solenoidi väli) kergesti arvutada magnetvälja induktsiooni. Tsirkulatsiooniteoreem mängib magnetostaati-

ka ülesannete lahendamisel samasugust rolli nagu Gaussi teoreem elektrostaatikas.

Ül. 56. Leidke magnetiline induksioon, mille tekitab lõpmatu tasandiline vool. Voolutihedus (A/m) on ühtlane ja võrdne α .

Vastus: $B = \mu_0\alpha/2$.

Ül. 57. Leidke magnetiline induksioon kaugusel r lõpmata pikast sirgjuhtmest. Voolutugevus juhtmes on I .

Vastus: $B = \mu_0 I / (2\pi r)$.

Ül. 58. Leidke magnetiline induksioon kaugusel r silindrilise ristlõikga juhi teljest, kui voolutihedus juhi ristlõike ulatuses on ühtlane ja võrdne J . Silindri raadius on R .

Vastus:

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 J r / 2 & \text{kui } r < R \\ \mu_0 J R^2 / (2r) & \text{kui } r \geq R \end{cases}$$

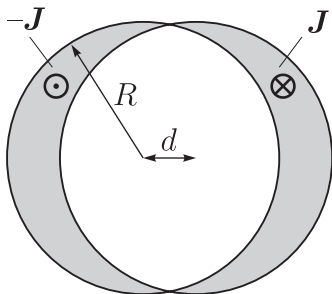
Ül. 59. Solenoidiks nimetatakse peenikest juhet, mis on ühtlaselt ja tihedalt keritud silindrilisele karkassile. Vaatleme hästi pikka solenoidi, millel keerdude arv ühikulise pikkusega lõigu kohta piki telge on n ning voolutugevus juhtmes I . Selline solenoid on plaatkondensaatori magnetiline analoog. Näidake, et: a) solenoidi sisemuses on magnetväli homogeenne ja suunatud telje sihis; b) väljaspool solenoidi magnetväli puudub; c) magnetilise induksiooni väärtus solenoidi sees on $B = \mu_0 n I$.

2.3 Superpositsiooniprintsiip

Ruumipiirkonda, kus voole ei eksisteeri, võime vaadelda kui võrdsete vastassuunaliste voolutiheduste superpositsiooni.

Ül. 60. Määrake magnetiline induksioon õõnsuses, mis moodustub kahe lõpmata pika paralleelse silindrilise ristlõikega sirgjuhi lõikumisel (joon. 7). Voolutihedused juhtides on võrdsed ent vastassuunalised ($\pm \mathbf{J}$), mõlema juhi raadius on R ning nende tsentrite vahekaugus on d .

Vastus: $\mathbf{B} = (\mu_0/2)\mathbf{J} \times \mathbf{d}$ (homogeenne vertikaalne väli).



Joonis 7: vt. ül. 60

Ül. 61. Lõpmata pikk juhe koosneb kahest sirgest harust, mis on üksteisega täisnurga all. Voolutugevus juhtmes on I . Leia magnetilise induksiooni väärtus punktis, mis asub ühe haru pikendusel kaugusel r juhtmest.

Vastus: $B = \mu_0 I / (4\pi r)$.

Ül. 62. Kui suur on magnetilise induksiooni väärtus pika

solenoidi otsa juures (teljel)? Solenoidi keerdude arv ühikulise pikkusega lõigu kohta piki solenoidi telge on n ning voolutugevus I .

Vastus: $B = \frac{1}{2}\mu_0 n I$.

2.4 Ampere'i seadus

Vooluelemendile $I d\mathbf{l}$ mõjub magnetväljas \mathbf{B} jõud

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Jällegi, siit saab leida kiirusega \mathbf{v} liikuvale punktlaengule q mõjuva jõu:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Seda nimetatakse Lorentzi jõuks.

Ül. 63. Leidke kahe lõpmata pika paralleelse sirgjuhtme vahel ühikulise pikkusega lõigu kohta mõjuv jõud, kui voolud juhtmetes on I_1 ja I_2 ning juhtmetevaheline kaugus on r .

Vastus: $F = \mu_0 I_1 I_2 / (2\pi r)$.

2.5 Magnetdipool

Magnetdipool on elektrilise dipooli analoog. Kuna magnetlaengud puuduvad, siis magnetdipool ongi jämedaim lähendus mistahes voolude süsteemi magnetvälja kirjeldamiseks suurte kaugustel. Magnetdipooli lihtsaimaks mudeliks on lõpmata väike tasapinnaline voolukontuur. Seda voolukontuuri iseloomustab magnetmoment \mathbf{p} , mille moodul võrdub SI (I — voolutugevus kontuuris, S — kontuuri pindala), siht on määratud voolukontuuri tasandi normaaliga ja suund krüvireegliga. \mathbf{p} ei sõltu kontuuri kujust. Magnetiline dipool \mathbf{p} tekitab ruumpunktis \mathbf{r} välja, mis polaarkoordinaatides on esitatav järgmiselt (vrld. valemiga 2):

$$B_r = \frac{\mu_0 p}{2\pi r^3} \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 p}{4\pi r^3} \sin \theta.$$

Välises väljas \mathbf{B} mõjub dipoolile pöördemomenti $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{B}$, mis püüab pöörata vektori \mathbf{p} väljaga \mathbf{B} samasuunaliseks. Magnetdipooli energia välisväljas \mathbf{B} avaldub $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}$. See mittehomogeenses väljas rakendub dipoolile jõud, mille x -sihine komponent $F_x = \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{B} / \partial x$.

Magnetdipooli väljana võib kirjeldada näiteks magneetunud ainetüki (püsimagneti) poolt tekitatavat magnetvälja suurte kaugustel. Vastav magnetmoment on siis aines eksisteerivate elementaarsete ringvoolude magnetmomentide vektorsumma (vt. ka jaotist 2.6).

Ül. 64. Laeng Q on ühtlaselt jaotunud üle sfääri raadiusega R . Sfäär pöörleb nurkkiirusega ω ümber tsentrit läbiva telje. Leidke sellise süsteemi magnetmoment. *Juhtnõör.* Jaotage sfääri pind lõpmata õhukesteks kihtideks ja summeerige. Õhukese sfäärilise segmendi pindala on määratud tema kõrgusega Δh : $\Delta S = 2\pi R \Delta h$.

Vastus: $\mathbf{p} = QR^2 \omega / 3$.

Ül. 65. Püsimagnet on riputatud niidi otsa. Selle magnetmoment on p (vektor \mathbf{p} asetseb horisontaaltasapinnas) ja

inertsimoment niidi kinnituspunktiga määratud vertikaaltelje suhtes I . Millise võnkeperioodiga toimuvad väikese amplituudiga vabavõnkumised, kui tekitada ruumis homogeenne horisontaalne magnetväli induksiooniga B ?

$$\text{Vastus: } T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{pB}}.$$

Ül. 66. Kaks püsomagnetit (magnetmomendid \mathbf{p}_1 ja \mathbf{p}_2) on paigutatud üksteisest kaugusele r , mis on palju suurem nende mõõtmetest. Leidke jõud, mis mõjub magnetite vahel.

$$\text{Vastus: } F = -\frac{3\mu_0}{2\pi r^4}(\mathbf{p}_1\hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2\hat{\mathbf{r}}).$$

Ül. 67. Elementaarosakese magnetmomendi ja vastava impulsimomendi suhet nimetatakse güromagnetiliseks suhteks. Leidke güromagnetiline suhe elektroni orbitaalse liikumise jaoks käsitledes elektroni liikumist Bohri teooria raames.⁵

$$\text{Vastus: } p/L = -e/2m.$$

2.6 Magnetväli aines

Seni vaatlesime selliseid magnetostaatika ülesandeid, kus voolude paigutus ruumis oli etteantud ja fikseeritud. Viies magnetvälja ainetüki, peame arvestama aine magneetumisega, st aines tsirkuleerivate molekulaarsete voolude ümberorienteerumisega magnetväljas. Molekulaarvoolud on tingitud aatomites tsirkuleerivatest elektronidest ja nende omamagnetmomentidest (spinnid). Seega on aatomitel ja molekulidel olemas magnetmoment. Välise välja puudumisel on need magnetmomendid kaootiliselt orienteeritud (va. ferromagneetikutes) ja nende mikroskoopilised väljad vastastikku kompenseerivad üksteist. Välise välja sisselülitamisel püüavad need dipoolid orienteeruda eelistatult välja sihis — aine magneetub. Aine sees mikroskoopilised voolud endiselt kompenseerivad üksteist, kuid aine pinnal liiguvad molekulaarvoolud kõik ühes suunas ja moodustavad mõnesugune makroskoopilise voolu. Seega magneetunud aine tekitab lisavälja, mis on määratud nende pindvoolude poolt. Näiteks ühtlaselt piki telge magneeditud silindrilise püsimagneeti väli on täpselt samasugune nagu sarnaste mõõtmetega solenoidi väli, õõnessilindri-kujulise püsimagneeti väli on esitatav kui kahe koaksiaalse solenoidi summaarne väli jne.

Magnetvälja käsitlemiseks aines on mugav kasutada peale magnetilise induksiooni veel *magnetvälja tugevust* $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu\mu_0$, kus suhteline magnetiline läbitavus μ on ainet iseloomustav konstant. Ferromagneetikutel $\mu \gg 1$, kõigil teistel ainetel $\mu \approx 1$. Analoogselt elektrilise induksiooniga on magnetvälja tugevus määratud ainult vabade laengukandjate juhtivusvoolu jaotusega ruumis. Tsirkulatsiooniteoreem, esitatuna vektori \mathbf{H} kaudu, võtab kuju

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}_l dl = \sum_i I_i,$$

kus seekord I_i on *juhtivusvoolud*, mis on hõlmatud kontuuriga Γ (st I_i hulka ei tule arvata magneetunud aine pinnale indutseeritud molekulaarseid voole). Siit on kerge järeldada, et H_τ peab olema pidev kahe keskkonna lahutuspinnaal.

⁵Teatavasti Bohri teooria kohaselt tiirleb elektron ümber tuuma ringorbiidil, kusjuures elektroni orbitaalne impulsimoment on kvantitud: $mvr = n\hbar$, kus $n = 1, 2, 3, \dots$

teame, et vektori \mathbf{B} jooned on kinnised, seega B_n on samuti pidev keskkondade lahutuspinnaal.

Nagu elektrostaatikaski, homogeenne välise magnetvälja puhul on sageli mõistlik eeldada, et väli magneetiku sees on samuti homogeenne ning magneetumus on ühtlane. Siis jääb vaid üle kindlaks teha, kas väljatugevuse ja magneetumuse suuruse sobiva valikuga õnnestub rahuldada B_n ja H_τ pidevuse nõuet kõikjal magneetiku pinnal.

Elektro- ja magnetostaatika põhivõrrandid on üldiselt sarnase struktuuriga, erinevus seisneb vaid magnetlaengute puudumises. Seetõttu saab analoogiat vastavate suuruste vahel ($\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B}$, $\varepsilon \leftrightarrow \mu$) edukalt kasutada mõningate magnetostaatika ülesannete lahendamisel, kui on teada vastava elektrostaatika ülesande lahend või ka vastupidi.

Ül. 68. Raua aatomi magnetmoment on $p = 2,2\mu_B$, kus $\mu_B = e\hbar/2m_e \approx 9,27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ on nn Bohri magneton (elektroni omamagnetmoment). Naaberaatomite vahekaugus raua kuubilises kristallvõres on $d = 2,3 \text{ \AA}$. Kui suur oleks magnetiline induksioon maksimaalselt magneetunud rauas välisvälja puudumisel?

$$\text{Vastus: } B = \mu_0 p/d^3 \approx 2,1 \text{ T}.$$

Ül. 69. Leia magnetiline induksioon lõpmata pika solenoidi sees, kui solenoid on täidetud ainega, mille suhteline magnetiline läbitavus on μ . Solenoidi amperkeerdude arv ühikulise pikkusega lõigu kohta piki solenoidi telge on nI .

$$\text{Vastus: } B = \mu\mu_0 nI.$$

Ül. 70. Magneetikust kera suhtelise magnetilise läbitavusega μ on asetatud homogeenesse magnetvälja \mathbf{B}_0 . Leia magnetiline induksioon kera sees. *Vihje.* Ühtlaselt magneetunud kera magnetiline induksioon väljaspool kera sarnaneb kera tsentrisse paigutatud magnetilise dipooli väljaga.

$$\text{Vastus: } \mathbf{B} = 3\mu \frac{\mathbf{B}_0}{2 + \mu} \text{ (vrld. ül. 49).}$$

2.7 Ferromagneetikud

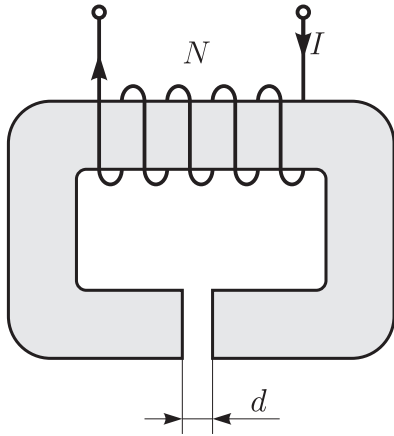
Ferromagneetikute iseärasuseks on, et $\mu \gg 1$ ja sõltub H -st. Seejuures μ (ega ka B) ei ole ühene H funktsioon. Kui H muutub tsükliliselt, siis B - H teljestikus moodustub nn hüstereesisilmus, mille pindala (so $\oint BdH$) on võrdne soojushulgaga, mis eraldub ferromagneetiku ühikulises ruumalas ühe tsükli vältel (nn ümbermagneetimistö). Väga tugevates väljades aine magneetumus saavutab lõpliku maksimaalse väärtuse (kõik molekulaarvoolud on ühes sihis orienteeritud) ja seega $\mu \rightarrow 1$.

Uurides induksioonijoonte murdumist ferromagneetiku pinnal jõuame tingimuse $\mu \gg 1$ tõttu järeldusele, et ferromagneetikust on \mathbf{B} praktiliselt paralleelne pinnaga ja väljaspool ferromagneetikut praktiliselt risti pinnaga. Seega magnetahelaid käsitlevates ülesannetes võib lugeda, et magnetilise induksiooni jooned on koondunud põhiliselt ferromagneetiku sisemusse ja nende "lekkimist" läbi ferromagneetiku külgpinnale võib mitte arvestada.

Ül. 71. Laboris kasutatav elektromagnet koosneb raudsüdamikust (suhteline magnetiline läbitavus μ), millele on keritud N keeruga voolupool (joon. 8). Õhupilu laius d on palju

väiksem südamiku paksusest. Südamiku kogupikkus on l . Kui suur on magnetiline induksioon õhupilus, kui voolutugevus on I ?

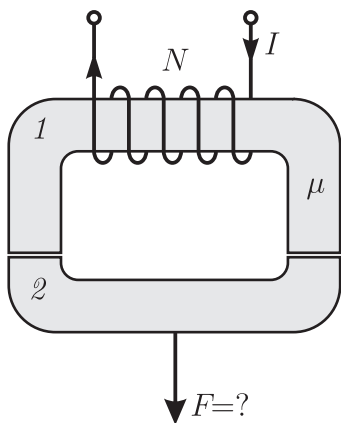
Vastus: $B = \mu_0 NI / (l/\mu + d)$.



Joonis 8: vt. ül. 71

Ül. 72. Elektromagnet koosneb südamikust 1 ja ankrust 2 (joonis 9); kummagi suhteline magnetiline läbitavus on μ . Südamikule on keritud N keeruga voolupool, mida läbib vool I . Südamiku ja ankruristlõikepindala on S ning kogupikkus l . Leidke tõmbejõud, millega südamik hoiab ankrut kinni. Juhtnõör. Siin võib kasutada virtuaalse nihke meetodit. Seejuures tuleb aga arvestada, et südamiku ja ankrurist vahelise kauguse muutmisel indutseeritakse poolis emj, mille vastu vooluallikas peab tegema tööd.

Vastus: $F = -\mu^2 \mu_0 SN^2 I^2 / l^2$.



Joonis 9: vt. ül. 72

2.8 Ülijuhid

Ülijuhi sees alati $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, ka staatiliste väljade korral (nn Meissneri efekt). Järeldused: a) väljaspool ülijuhiti pinna vahetus läheduses $B_n = 0$, st induksioonijooned on paralleelsed pinnaga; b) vastavalt tsirkulatsiooniteoreemile ülijuhi sisemuses $I = 0$, st. vool võib eksisteerida ainult pinnakihis. Kui tuua ülijuhi lähedale vooluga juht, indutseeritakse ülijuhi pinnal sellised voolud, mis parajasti kompenseerivad ülijuhi sees

välise magnetvälja. Mõningatel lihtsatel juhtudel saab nende pindvoolude mõju leida kujutismeetodi abiga. Väline vool ja kujutisvool peavad tekitama sellise summaarse välja, mille jaoks $B_n = 0$.

Ül. 73. Lõpmatu tasapinnalise ülijuhi pinnast kaugusel h asub ülijuhi pinnaga paralleelne lõpmata pikk sirgjuhe, kus voolutugevus on I . Leidke selle juhtme ühikulise pikkusega lõigule mõjuv jõud.

Vastus: $F = \mu_0 I^2 / (4\pi h)$.

3 Alalisvooluahelad

3.1 Kirchoffi seadused

Elektriskeemide analüüsimisel on fundamentaalse tähtsusega Kirchoffi seadused. *Kirchoffi I seadus*: sõlme koonduvate voolude algebraline summa on null. See on ka ilmne, sest muidu hakkaks sõlme kogunema laeng ($\Delta q = I \Delta t$), mis viiks ahela statsionaarsest režiimist välja. Kui ahelas on N sõlme, siis Kirchoffi I seaduse alusel saab koostada $N - 1$ sõltumatut võrrandit. *Kirchoffi II seadus*: elektromotoorjõudude ja pingelangude algebraline summa piki elektriahela mistahes suletud kontuuri on võrdne nulliga. Väide tuleneb asjaolust, et ringliikumisel piki kontuuri jõuame sama potentsiaaliga punkti tagasi — pingelangudel laengukandja potentsiaalne energia kahaneb (muundub Joule'i soojuseks), elektromotoorjõudude läbimisel aga kasvab (kõrvaljõudude poolt tehtava töö toimetel). Kirchoffi II seaduse alusel saab kirja panna niipalju võrrandeid, kuipalju on vooluringis sõltumatuid kontuure.

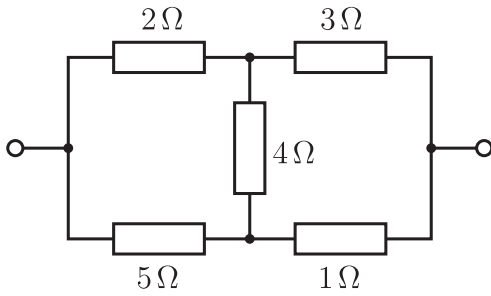
Siinjuures voolutugevused, pinged, potentsiaalid ja elektromotoorjõud on algebralised suurused. Kui näiteks mingis ahelalharus tuleb voolutugevus negatiivne, siis see tähendab, et tema suund on vastupidine esialgselt postuleeritud suunale.

Järgnevad kaks meetodit võimaldavad Kirchoffi seadusi meetoodiliselt rakendada.

Potentsiaalide meetod. Vaatleme vooluringi sõlmede potentsiaale (mingi vabalt valitava sõlme suhtes) kui otsitavaid tundmatuid suurusi. Sellega on Kirchoffi II seadus automaatselt täidetud. Nüüd saame iga sõlme jaoks üles kirjutada Kirchoffi I seaduse, arvutades pinged harudes kui naabersõlmede potentsiaalide vahed.

Kontuurvoolude meetod. Selle meetodi puhul võetakse otsitavateks suurusteks *kontuurvoolud*, st tegelikke voolusid vooluringi harudes, mis on ühised kahele või enamale kontuurile, vaadeldakse kui vastavate kontuurvoolude algebralisi summasid (iga kontuuri jaoks tuleb postuleerida voolu ümberkäigu suund). Sel viisil on Kirchoffi I seadus automaatselt täidetud. Nüüd saame vooluringi kõikide sõltumatute kontuuride jaoks kirja panna Kirchoffi II seaduse.

Ül. 74. Leidke joonisel 10 kujutatud ahela kogutakistus nii potentsiaalide kui ka kontuurvoolude meetodiga. *Märkus.* Avaldiste lihtsustamiseks võib lugeda, et ahelat läbib vool 1 A või et ahela väljundklemmid on ühendatud 1 V elektromotoorjõu allikaga; esimesel juhul ahela otste vahel tekkingelang on arvuliselt võrdne tema takistusega, teisel juhul vastav kontuurvool on arvuliselt võrdne takistuse pöördväärtusega.



Joonis 10: vt. ül. 74

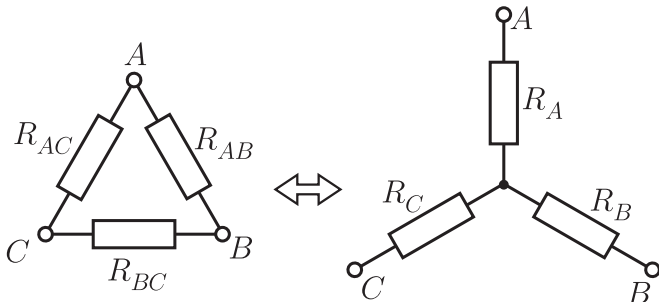
3.2 Ekvivalentskeemid

Täht- ja kolmnurkühendus. Tähtühenduse saab alati teisendada temaga elektrilise funktsionaalsuse poolest ekvivalentskeemiks kolmnurkühenduseks ja vastupidi (joon. 11). Teisendusvalemid on järgmised:

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \text{ jne. tsükliliselt,}$$

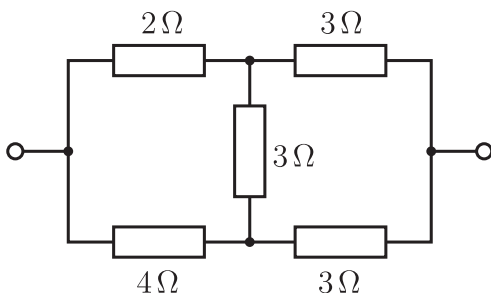
$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} \text{ jne. tsükliliselt.}$$

Eriti lihtsa kuju omandavad need valemid juhul kui $R_{AB} = R_{AC} = R_{BC}$ ja $R_A = R_B = R_C$.



Joonis 11: Täht- ja kolmnurkühendus

Ül. 75. Leidke joonisel 12 kujutatud ahela takistus.

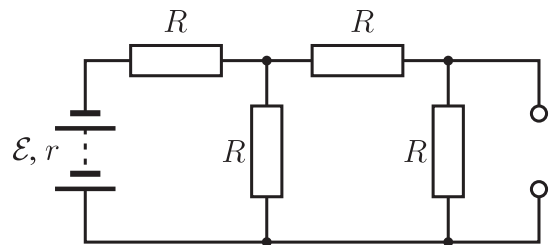
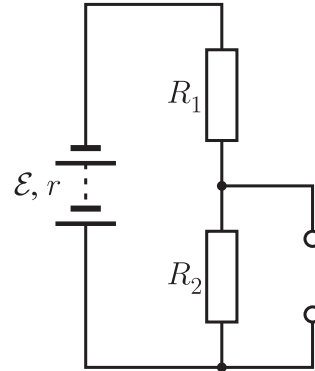


Joonis 12: vt. ül. 75

Elektromotoorjõud ja takistus jadamisi. Suvaline lineaarsetest elementidest (oomilised takistid, elektromotoorjõud allikad) koostatud kahe väljundklemmiga elektriskeem on ekvivalentne teatava elektromotoorjõu \mathcal{E} ja takistuse r jadamiseks (st sisetakistust omava pingeaallikaga). Ekvivalentskeemi parameetrite määramiseks on meil kaks tingimust.

1) Pinge väljundklemmidel on võrdne elektromotoorjõuga \mathcal{E} , kui välisahel on katkestatud ($I = 0$). 2) Kui väljundklemmid lühistada, siis lühisvool on \mathcal{E}/r .

Ül. 76. Milline on maksimaalne võimsus, mida saab tarbida joonisel 13 toodud elektriahelate väljundklemmidelt?



Joonis 13: vt. ül. 76

Püsivooluallikas ja takistus rööbiti. Suvaline lineaarsetest elementidest koostatud kahe väljundklemmiga elektriskeem on ekvivalentne teatava püsivooluallika I_0 ja takistuse r rööplülitusega. (Püsivooluallikas on idealiseeritud seade, mis genereerib konstantset voolu I_0 sõltumata välisahela takistusest.) On kerge veenduda, et pingeaallikas elektromotoorjõuga \mathcal{E} ning sisetakistusega r on ekvivalentne püsivooluallikaga \mathcal{E}/r , mis on ühendatud rööbiti sisetakistusega r .

Ül. 77. N elektromotoorjõu allikat on ühendatud rööbiti. i -nda allika emj on \mathcal{E}_i ning sisetakistus r_i . Millised on saadud liitallika vastavad parameetrid? *Vihje.* Alustuseks on lihtsam leida ekvivalentse püsivooluallika parameetrid.

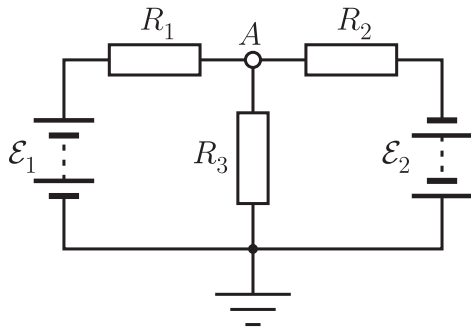
Vastus:

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_i \frac{1}{r_i} \mathcal{E}_i}{\sum_i \frac{1}{r_i}}, \quad r = \left(\sum_i \frac{1}{r_i} \right)^{-1}.$$

Viimase ülesande lahendusega on tõestatud järgmine teoreem: kui elektriahel sisaldab kaks sõlme, A ja B , mis on omavahel ühendatud N haruga, kusjuures i -s haru sisaldab elektromotoorjõudu \mathcal{E}_i jadamisi oomilise takistusega R_i , siis A ja B potentsiaalide vahe avaldub kui kaalutud keskmine

$$U = \frac{\sum_i \frac{1}{R_i} \mathcal{E}_i}{\sum_i \frac{1}{R_i}}.$$

Ül. 78. Miline on sõlme A potentsiaal joonisel 14 kujutatud elektriskeemis?

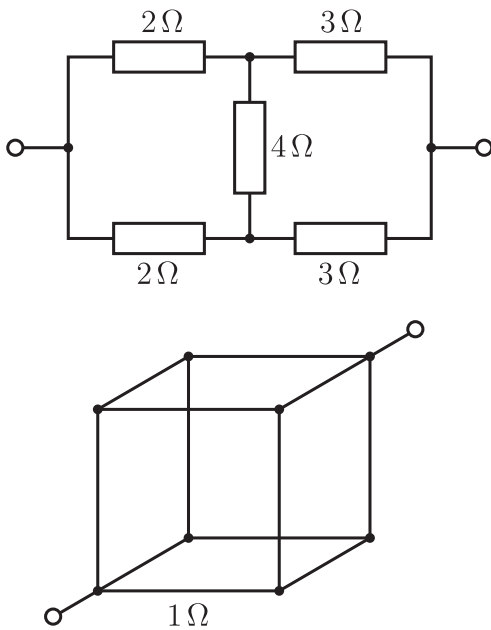


Joonis 14: vt. ül. 78

3.3 Spetsiaalvõtted

Sümmeetria. Mõnikord on võimalik sümmeetriakaalutluste põhjal otsustada, kuidas on omavahel seotud ahela sümmeetriliste sõlmede potentsiaalid või sümmeetriliste harude pinged-voolud. Need sõlmed, mille potentsiaalid on võrdsed, võib omavahel lühistada (elektriskeemi lihtsustamise eesmärgil) ilma et ahela elektriline funktsionaalsus muutuks.

Ül. 79. Leidke joonisel 15 kujutatud ahelate takistused.



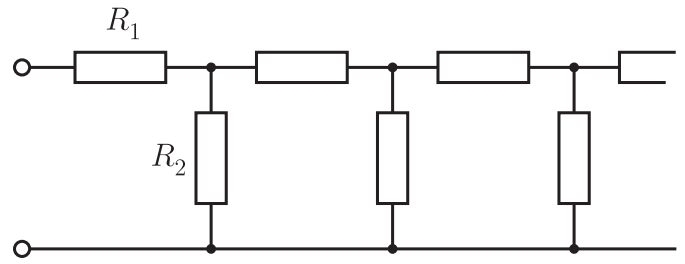
Joonis 15: vt. ül. 79

Lõpmatud perioodilised ahelad. Lõpmatute perioodilise struktuuriga ahelate korral ühe lüli lisamine või ärajätmine ei muuda ahela kogutakistust, järelikult saame ahela takistuse R esitada kui kombinatsiooni R -st ja üksiku lüli takistusest ja seejärel saadud seosest avaldada otsitava R .

Ül. 80. Leidke joonisel 16 kujutatud lõpmatu ahela takistus.

Lõpmatu perioodiline võre. Selgitame ideed näitega.

Ül. 81. Leidke lõpmatu tasandilise trigonaalse võre naabersõlmede vaheline takistus. Naabersõlmi ühendava traadijupi takistus on kõikjal 1Ω . *Juhtnõör.* Tähistame sõlmed, mille vahelist takistust otsime, A ja B . Olgu C mingi sõlm, mis asub



Joonis 16: vt. ül. 80

lõpmata kaugel sõlmedest A ja B . (a) Laseme sõlmest A sisse voolu I ja võtame ta välja sõlmest C . Et C on väga kaugel, siis vool sõlmes A lahkneb sümmeetriliselt kõigis suundades. (b) Laseme nüüd sõlmest C sisse voolu I ja kogume selle kokku sõlmest B . Seekord võime väita, et vool koondub sõlme B sümmeetriliselt kõigist suundadest. Ülesande lahenduse saab kätte vaadeldes juhtumite (a) ja (b) superpositsiooni.

Vastus: $R = 1/3 \Omega$.

Ül. 82. Leidke lõpmatu ruumilise kuubilise võre naabersõlmede vaheline takistus. Naabersõlmi ühendava traadijupi takistus on kõikjal 1Ω .

Vastus: $R = 1/3 \Omega$.

3.4 Mittelineaarsed skeemielemendid

Graafiline meetod. Vaatleme elektriskeemi, kus mittelineaarne element (diiod, hõõglamp, gaaslahenduslamp vms) on järjestikku oomilise takistiga R ja ahelale rakendub elektromotoorjõud \mathcal{E} (vajadusel tuleb skeem eelpoolmainitud võtetega sellisele kujule taandada). Lahendusidee seisneb selles, et esitame takisti tunnusjoone kujul $U = \mathcal{E} - IR$, kus U on mittelineaarsel elemendil olev pinge, ning leiame selle sirge ja mittelineaarse elemendi tunnusjoone lõikepunkti.⁶ Sirge joonestamiseks piisab kahest punktist, nt $U = 0, I = \mathcal{E}/R$ ning $I = 0, U = \mathcal{E}$.

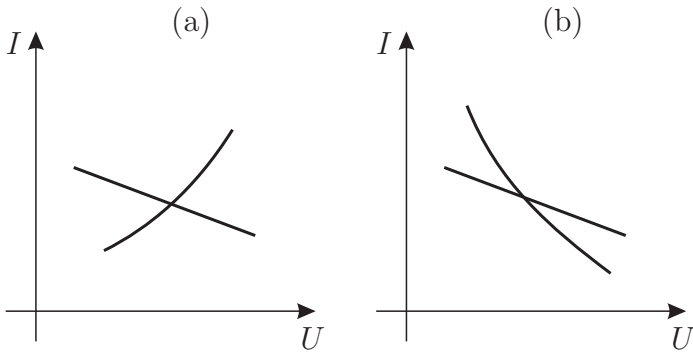
Kui juhtub mitu mittelineaarset elementi olema järjestikku või rööbiti, tuleb nende tunnusjooned liita vastavalt kas voolu või pingega järgi, selleks et saada summaarse ahela voltamperkarakteristikut.

Lahendi stabiilsus. Kui mittelineaarse elemendi tunnusjoon on küllalt iseäraliku kujuga (gaaslahenduslambid, türistorid, tunneldiiodid jms), võib lõikepunkte olla mitu. Mõned nendest on harilikult ebastabiilsed. Stabiilsuse uurimiseks analüüsime, mis juhtub, kui pinge U kaldub mingi häirituse tulemusena oma tasakaalulisest väärtusest õige pisut kõrvale. Selleks oletame, et mittelineaarse elemendiga on rööbiti ühendatud väike kondensaator.⁷ Kui pinge elemendil veidikene kasvab, siis voolud läbi mittelineaarse elemendi ja takisti ei ole enam võrdsed ja kondensaator hakkab kas laaduma või tühjenema olenevalt sellest, milline on mittelineaarse elemendi tunnusjoone puutuja tõus (so. diferentsiaalset takistus) lõike-

⁶Matemaatiliselt on tegu transtsendentse võrrandi $f(x) = ax + b$ graafilise lahendamise, milleks tuleb leida graafikute $y = f(x)$ ja $y = ax + b$ lõikepunkt.

⁷Alternatiivne variant oleks ühendada seadmega jadamisi induktor. Tegelikult mistahes skeemielement omab teatavat parasiitset mahtuvust ja induktiivsust.

punkti juures. Kui osutub, et $dU/dt > 0$, siis pinge üha jätkab kasvamist kuni süsteem jõuab mingisse teise tasakaalupunkti. Nii on kerge näha, et näiteks juhtum (a) joonisel 17 on stabiilne, aga (b) ebastabiilne.



Joonis 17: Lõikepunkti stabiilsus

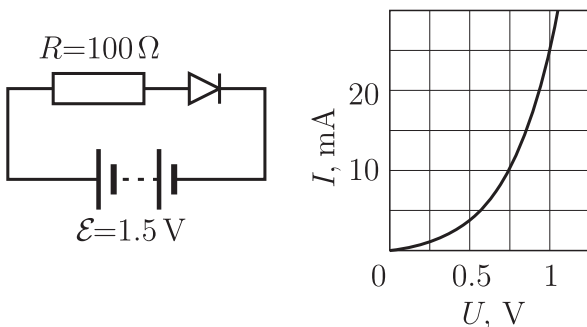
Hüsterees. Teatud kujuga tunnusjoonte korral võib esineda *hüsterees*: muutes tsükliliselt pinget või voolu elemendil, saadakse $I-U$ graafikul silmusetatoline kõver.

Diferentsiaalne takistus. Kui mittelineaarset elementi läbiv vool varieerub sellistes piirides, mille ulatuses selle elemendi tunnusjoone võib lugeda lineaarseks, siis elektriskeemi analüüsimisel vahelduvkomponendi seisukohalt võib selle elemendi asendada ekvivalentse oomilise takistiga, mille takistus on on määratud tunnusjoone tõusuga (diferentsiaalse takistusega) uuritavas tunnusjoone piirkonnas: $R = dU/dI$. Erinevalt integraalsest takistusest võib diferentsiaalne takistus olla ka negatiivne.

Hõõglamp. Hõõglambi lihtsaimas mudelis võib soojusjuhtivusest tingitud kaod jätta arvestamata ja eeldada, et kogu energia hajub kiirgusena (see kehtib seda täpsemalt, mida kõrgem on hõõgniidi temperatuur). Seejuures hõõgniidi võib lugeda *halliks*, st tema kiirguse intensiivsus pindalaühiku kohta on võrdne $\alpha\sigma T^4$, kus α on pinna kiirgamisvõimet iseloomustav parameeter (volframi puhul ligikaudu 0,5). Paljude metallide eritakistus on heas lähenduses võrdeline absoluutse temperatuuriga.

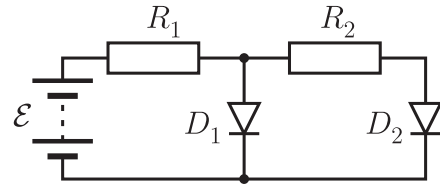
Ül. 83. Kui suur on voolutugevus joonisel 18 toodud ahelas? Diodi voltamperkarakteristik on toodud juuresoleval graafikul.

Vastus: $I \approx 8 \text{ mA}$.



Joonis 18: vt. ül. 83

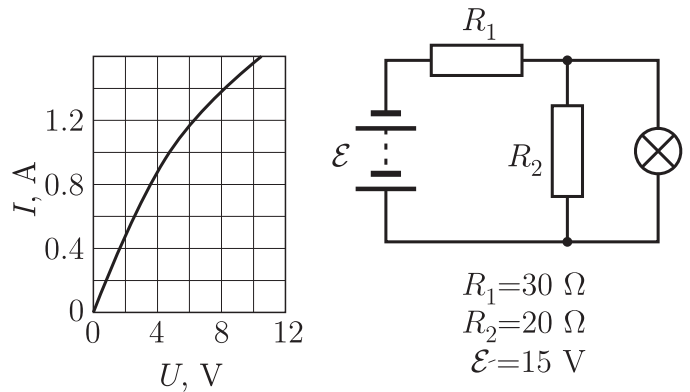
Ül. 84. Milline on voolutugevus läbi diodi D_2 joonisel 19 toodud ahelas? $R_1 = 600 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$, $\mathcal{E} = 2,4 \text{ V}$. Diodid on ühesugused ja nende voltamperkarakteristikud sarnanevad eelmises ülesandes antuga.



Joonis 19: vt. ül. 84

Ül. 85. Joonisel 20 on kujutatud teatud hõõglambi voltamperkarakteristik. Kui suur võimsus eraldub lambil, kui viimane ühendada pingevalikaga nii nagu näidatud juuresoleval skeemil?

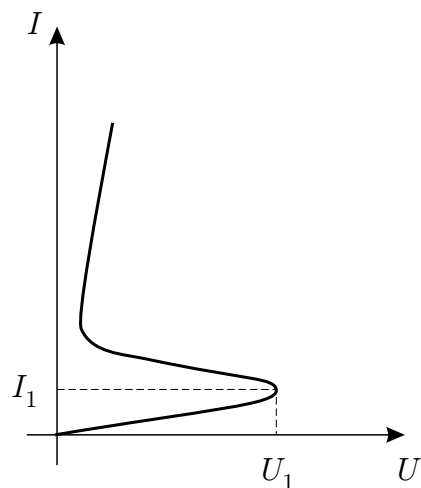
Vastus: $P \approx 0,48 \text{ W}$.



Joonis 20: vt. ül. 85

Ül. 86. Joonisel 21 on kujutatud türistori tunnusjoone põhimõtteskeem. Türistor ühendatakse jadamisi takistiga R . Milline minimaalne pingeline U_0 tuleb ahelale rakendada, et türistor avaneks (so. voolutugevus ahelas kasvab hüppeliselt)?

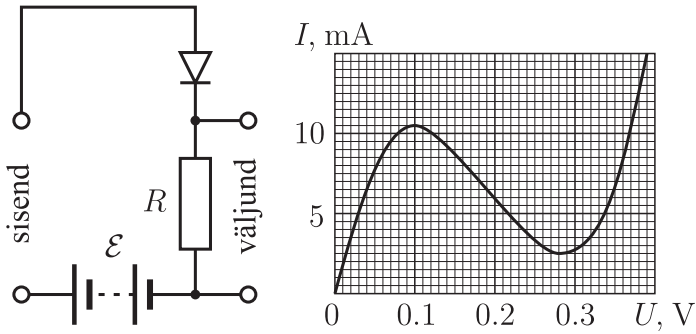
Vastus: $U_0 \approx U_1 + I_1 R$.



Joonis 21: vt. ül. 86

Ül. 87. Tunneldiodi erilise ehituse tõttu on tema tunnusjoon ligikaudu selline nagu kujutatud graafikul joonisel 22. Toodud on ka lihtsaima tunneldiodil põhineva võimendi skeem, kus $R = 10 \Omega$ ja $\mathcal{E} = 0,25 \text{ V}$. Leidke, mitu korda võimendatakse sisendisse antavat väikese amplituudiga vahelduvsignaali.

Vastus: ~ 8 korda.



Joonis 22: vt. ül. 87

Ül. 88. Voolutugevuse määramiseks elektri ahelas lülitatakse ahelasse muudetava mõõtepiirkonnaga ampermeeter. Mõõtepiirkonnal 10 mA on ampermeetri näit 2,95 mA, mõõtepiirkonnal 3 mA aga 2,90 mA. Milline on voolutugevus ahelas ilma ampermeetriga? Võib eeldada, et tegu on magnetoelektrilise ampermeetriga, millel sisetakistus on pöördvõrdeline mõõtepiirkonna ulatusega. *Juhtnõör.* Kuna ampermeetri näitude erinevus on suhteliselt väike, siis võib kasutada lineaarset lähendust ja lugeda ahelasse lülitatud lisatakistist tingitud voolutugevuse muutuse võrdeliseks takistuse suurusega.

Vastus: $I = 2,97 \text{ mA}$.

Ül. 89. Tuletage hõõglambi ligikaudne voltamperkarakteristik.

Vastus: $I \propto U^{3/5}$.

Ül. 90. Hõõglambi soklile on kirjutatud: 26 V 0,12 A. Toatemperatuuril mõõdeti hõõgniidi takistuseks $R_0 = 24 \Omega$. Hinnake hõõgniidi pikkust l , diameetrit d ja töörežiimi temperatuuri T . Hõõgniit on valmistatud volframist, mille eritakistus toatemperatuuril on $\rho_0 = 5,3 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

Vastus: $l \approx 12 \text{ cm}$, $d \approx 5,8 \mu\text{m}$, $T \approx 2650 \text{ K}$.

4 Kondensaatoreid sisaldavad alalisvooluahelad

4.1 Energia jäävus

Kui siirdeprotsessi vältel läbib passiivset skeemielementi (takistit, diodi vms) vooluimpulss, siis sellel elemendil eraldub mõnesugune lõplik soojushulk. Esimese hooga võib tekkida mõte tuletada voolutugevuse I ja pingelangu U sõltuvus ajast ja seejärel integreerida hetkvõimsust UI (või lineaartakisti puhul I^2R). Sageli saab vastuse märksa kergemini kätte kasutades energia jäävust: *töö* \rightarrow *soojus* + *potentsiaalse energia juurdekask* ehk siis emj allika poolt tehtav töö laengu te transportimisel läbi vooluringi ($\mathcal{E}q$) hajub osaliselt soo-

jusena pingelangudel, osaliselt aga salvestatakse kondensaatori/indukti potentsiaalse energiana. Kui pingelang elemendil on konstantne (sellise lähenduse võib teha mõnikord diodide jms elementide jaoks, kus voolutugevus hakkab mingil pingel hästi kiiresti kasvama), siis eraldunud soojushulk on määratud elementi läbinud laenguga:

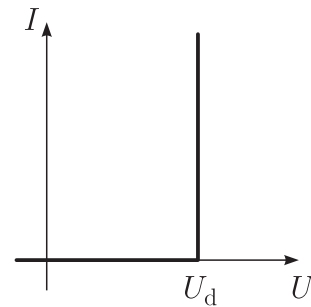
$$Q = \int UI dt = U \int I dt = Uq.$$

Ül. 91. Järjestikku lülitatud takistist R ja kondensaatorist C koosnevale ahelale lülitatakse elektromotoorjõud \mathcal{E} . Kondensaator oli eelnevalt laadimata. Leidke takistil eralduv soojushulk.

Vastus: $Q = C\mathcal{E}^2/2$.

Ül. 92. Kondensaator mahtuvusega $C = 10 \mu\text{F}$ on laetud pingeni $U_0 = 6 \text{ V}$. Lülitati abil suletakse vooluring, mis koosneb sellest kondensaatorist ja diodist, mille voltamperkarakteristik on näha joonisel 23. Antud ülesandes võtame $U_d = 1 \text{ V}$. Kui suur energia eraldub lüliti juures sähvatusena (so kaarlahendusena), kui soojuse eraldumisega juhtmetes võib mitte arvestada?

Vastus: $Q \approx 125 \mu\text{J}$.



Joonis 23: Diodi voltamperkarakteristika lihtsaim mudel (vt. ül. 92 ja 113).

4.2 Elektrilaengu jäävus

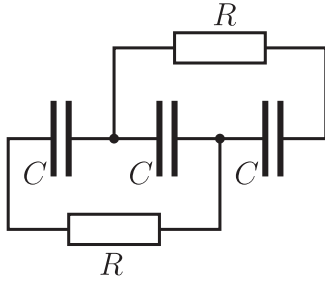
Kui elektriskeemi saab jagada sellisteks osadeks, mis on üksteisest laengu ülekande mõttes isoleeritud, siis summaarne laeng igal sellisel skeemiosal on konstantne. See idee võib osutada kasulikuks selliste skeemide analüüsimisel, mis sisaldavad mitut kondensaatorit.

Ül. 93. Näidake, et kondensaatrite järjestikühenduse mahtuvus avaldub valemiga

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right)^{-1}.$$

Ül. 94. Kolm ühesugust laadimata kondensaatorit mahtuvusega C on ühendatud jadamis. Sellele ahelale lülitatakse pingellikas elektromotoorjõuga \mathcal{E} . Kui kondensaatorid on täielikult laadunud, ühendatakse pingellikas lahti. Seejärel ühendatakse ahelasse samaaegselt kaks ühesugust takistit R nõnda nagu kujutatud joonisel 24. Kui suur soojushulk eraldub kummalgi takistil?

Vastus: $Q = 2C\mathcal{E}^2/27$.



Joonis 24: vt. ül. 94

4.3 Karakterne aeg

Kondensaatori käitumist kirjeldab üldjuhul järgmine võrrand:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt}, \quad (5)$$

mis ütleb, et kondensaatorit läbiva voolu tõttu kogunevad laengud kondensaatori plaatidele ja tekitavad potentsiaalide vahe ($Q = CU$). Kui jadamisi ühendatud takistist R ja kondensaatorist C koosnevale ahelale rakendada muutumatu pinge U_0 , siis

$$RI + U = U_0 \quad \text{ehk} \quad RC \frac{dU}{dt} + U = U_0.$$

Viimase võrrandi üldlahend on

$$U(t) = \text{Const} \times e^{-t/RC} + U_0.$$

(Integreerimiskonstant sõltub kondensaatori algaengust.) RC rööpahela korral tulevad valemid täpselt samad, ainult U_0 asemel on I_0R , kus I_0 on voolutugevus läbi ahela. Niisiis statsionaarne olukord kujuneb RC ahelas välja karakterse aja $\tau = RC$ jooksul.

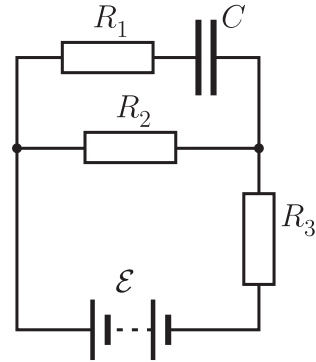
Oletagem nüüd, et RC -ahelat sisaldavas vooluringis toimuvad pinge- või voolukõikumised (näiteks eelnevas arvutuses võime muuta U_0 sõltuvaks ajast). Selle protsessi kiirust iseloomustab mõnesugune karakterne aeg T (nt vönkeperiood). Kui $T \gg \tau$, on tegemist kvaasistatsionaarse olukorraga, sest RC -ahel jõuab aja T vältel ammu relakseeruda. Aeglaselt muutuva voolu seisukohast on kondensaatori juures ahel katkestatud. Kui $T \ll \tau$, võib pingeid ja voole vaadelda aeglaselt muutuva (alalis-) komponendi ja kiirelt muutuva (vahelduv-) komponendi superpositsioonina ning arvestada, et kiire vahelduvkomponendi jaoks on kondensaatori takistus väike võrreldes takistusega R . Kondensaatori pinge hakkab kõikuma amplituudiga, mis on hulga väiksem pinge keskmisest väärtusest.

Ül. 95. Milline on kondensaatori laadumise karakterne aeg joonisel 25 kujutatud elektriskeemis? *Vihje.* Siin läheb vaja ka ideed jaotisest 3.2.

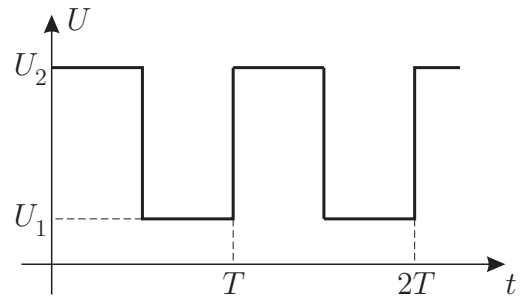
$$\text{Vastus: } \tau = \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) C.$$

Ül. 96. Järjestikku lülitatud takistist ja kondensaatorist koosnevale ahelale lülitatakse joonisel 26 näidatud kujuga vahelduvpinge. Leidke takistil eralduv võimsus järgmistel juhtudel: a) $T \ll RC$; b) $T \gg RC$.

$$\text{Vastus: a) } P = (U_2 - U_1)^2 / 4R; \quad \text{b) } P = C(U_2 - U_1)^2 / T.$$



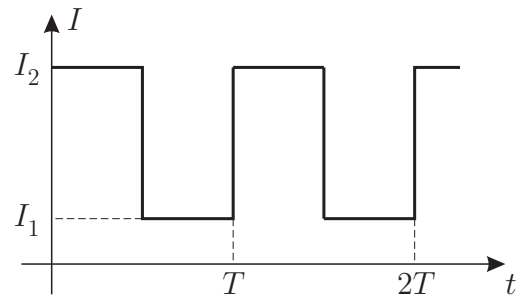
Joonis 25: vt. ül. 95



Joonis 26: vt. ül. 96

Ül. 97. RC rööpahelat läbib vool, mis sõltub ajast selliselt nagu näidatud joonisel 27. Leidke kondensaatori pingekõikumiste amplituud järgmistel juhtudel: a) $T \ll RC$; b) $T \gg RC$.

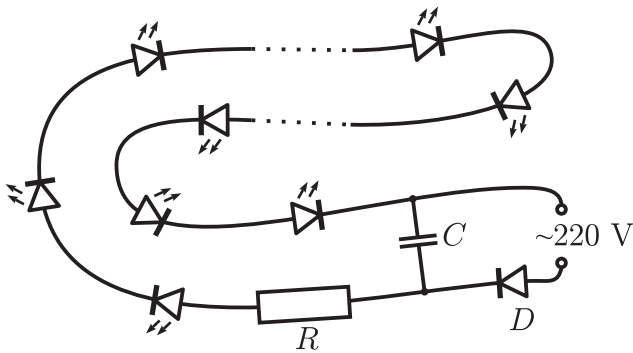
Vastus: a) $(I_2 - I_1)T/8C$; b) $(I_2 - I_1)R/2$.



Joonis 27: vt. ül. 97

Ül. 98. Jõulukaunistuse valmistamiseks otsustas Juku ühendada jadamisi kokku 50 valgusdiodi ja toita seda ahelat läbi alaldusdiodi D otse 220 V võrgupingega (joon. 28). Voolu piiramiseks on ahelasse lülitatud takisti R ning voolu pulsatsiooni väljasilumiseks kondensaator C . Pingelang alaldusdiodil on tühine, igal valgusdiodil aga 3 V. a) Kui suure takistuse ja võimsusega tuleks valida takisti R kui valgusdiodid taluvad voolu kuni 20 mA? b) Kui suure mahtuvusega kondensaator kindlustab, et valgusdiodide läbiva voolu muutlikkus jääb 5% piiresse? Võrgusagedus on 50 Hz. *Vihje.* Ülesande sõnastusest võib aimata, et rangelt täpset vastust ei nõuta, seega pinge kondensaatoril ja voolu läbi ahela võib lugeda konstantseks.

Vastus: a) $8\text{ k}\Omega$, $3,2\text{ W}$; b) $50\ \mu\text{F}$.



Joonis 28: vt. ül. 98

5 Induktoreid sisaldavad alalisvooluahelad

5.1 Faraday induksiooniseadus

Vektorvälja voo mõistega tutvusime jaotises 1.1. Olgu S suvaline pind, mis toetub antud voolukontuurile. Magnetvooks läbi selle kontuuri nimetatakse suurust

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

kus B_n on magnetilise induksiooni normaalkomponent pinnaelemendi dS asukohas. Φ väljendab induksioonijoonete koguarvu, mis on haaratud voolukontuuri poolt ja seega ei sõltu pinna S valikust. Enamikes ülesannetes õnnestub S nõnda valida, et B_n oleks vähemalt tükati konstantne.

Faraday seadus väidab, et suletud kontuuri poolt haaratud magnetvoo muutus indutseerib selles kontuuris elektromotoorjõu $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ (miinusmärk viitab Lenzi reeglile — indutseeritud emj poolt kontuuris tekitatavad voolud toimivad vastu magnetvoo muutusele). Siin esineb Φ täistuletis, mis sisaldab endas kahte komponenti. Esimene, $\partial\Phi/\partial t$, on põhjustatud magnetvälja ajalisest muutumisest. Magnetvälja ajalise muutumisega indutseeritud elektromotoorjõudu võib põhjendada pööriselektrivälja tekkimisega, mille tsirkulatsioon on nullist erinev:

$$\oint_{\Gamma} E_t dl = \mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Teine komponent arvestab kontuuri asendi muutumist magnetvälja suhtes (kontuur liigub välja suhtes, muudab oma kuju või orientatsiooni). Selle komponendi saab taandada kontuuri elementaarlõigule. Nimelt kiirusega \mathbf{v} liikuva juhtmelemendi $d\mathbf{l}$ otste vahel indutseeritakse emj $d\mathcal{E} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ (kolme vektori segakorrutis, võib kirjutada ka kujul $\mathbf{B} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ või $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{l}$). Selle elektromotoorjõu allikaks on kiirusega \mathbf{v} liikuvale laengule mõjuv Lorentzi jõud $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Vaatleme magnetväljas asetsevat voolukontuuri, mille oomiline takistus on R . Siis

$$dq = Idt = \frac{\mathcal{E}}{R} dt = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{d\Phi}{R}.$$

Niisiis sellisel juhul magnetvoo muutus $\Delta\Phi$ määrab üheselt laengu q , mis läbib juhtme ristlõiget sama aja jooksul. Ülijuhtiva kontuuri korral ($R = 0$) saame

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E} = RI = 0 \implies \Phi = \text{Const.}$$

Seega ülijuhtiva kontuuriga haaratud magnetvoog püsib muutumatu. Välise magnetvälja muutudes indutseeritakse ülijuhi pinnale sellised voolud, mille väli kompenseerib välise välja muutuse.

Ül. 99. Üks meetod magnetilise induksiooni mõõtmiseks seisneb järgnevas. Magnetvälja viiakse väike pool, mille telg orienteeritakse paralleelseks \mathbf{B} -ga. Pooli väljaviigud ühendatakse nn. ballistilise galvanomeetriga, mis on võimeline mõõtma lühikese vooluimpulsi laengut. Pooli pööratakse nüüd järsult 180° võrra. Kui suur laeng läbib galvanomeetrit? Pooli pindala on S , mähise keerdude arv N ja mähise aktiivtakistus R .

Vastus: $q = 2BNS/R$.

Ül. 100. Kaks paralleelset horisontaalset lõpmata pikka tühise elektritakistusega metallrelssi asetsevad teineteisest kaugusel l . Relsid on ühendatud kondensaatoriga, mille mahtuvus on C ja mis on laetud pingeni U_0 . Ruumis eksisteerib homogeenne vertikaalne magnetväli induksiooniga B . Relssidele asetatakse risti metallvarras massiga m , mis saab relsside peal hõõrdevabalt libiseda (kuid säilitab viimastega elektrilise kontakti). a) Millise maksimaalse kiiruse saavutab varras? b) Kui suur on sellise “elektromagnetilise kahuri” maksimaalne võimalik kasutegur (st kui suur osa kondensaatorisse salvestatud energiast on võimalik muundada varda kineetiliseks energiaks)?

Vastus: a) $v_{\max} = \frac{B l C U_0}{m + (B l)^2 C}$; b) $\eta = 0,25$.

Ül. 101. Dielektrilisest materjalist rõngas massiga m on kergete kodarate abil kinnitatud telje külge, mille ümber ta saab hõõrdevabalt pöörelda. Laeng Q on jaotunud ühtlaselt üle rõnga. Algselt asub rõngas piki telge suunatud homogeenes magnetväljas induksiooniga B . Mingil hetkel lülitatakse magnetväli välja. Kui suure nurkkiiruse omandab selle tulemusena algselt liikumatu rõngas?

Vastus: $\omega = BQ/(2m)$.

5.2 Omainduksioon

Voolukontuuris tsirkuleeriv vool tekitab ümbritsevas ruumis magnetvälja. Selle magnetvälja voog läbib ka seda sama kontuuri. \mathbf{B} väärtus on igas ruumipunktis võrdeline voolutugevusega kontuuris, järelikult ka magnetvoog läbi kontuuri on võrdeline voolutugevusega: $\Phi = LI$. Võrdetegurit L nimetatakse voolukontuuri induktiivsuseks. Kui ahelale on rakendatud pinge U , siis induksiooniseaduse alusel $U = -\mathcal{E} = d\Phi/dt$ ehk

$$U = L \frac{dI}{dt}, \quad (6)$$

mis on üldine võrrand konstantse induktiivsusega voolukontuuri (induktiivpooli) käitumise kirjeldamiseks (vrdl. kondensaatori võrrandiga 5). Niisiis voolutugevus läbi kontuuri ei saa muutuda hüppeliselt vaid reageerib mõnesuguse inertsiga

(väikese induktiivsusega kontuuri korral võib see olla muidugi praktiliselt hetkeline).

Mõningatel idealiseeritud juhtudel saab kontuuri induktiivsuse arvutada definitsioonivalemist $\Phi = LI$ lähtudes. Kui meil on tegu kontuuriga, mis koosneb mitmest keerust, siis tuleb tähele panna, et Φ ei ole mitte magnetvoog läbi üksiku keeru, vaid *kogu* magnetvoog, mis on kontuuri poolt aheldatud. Näiteks solenoidi korral $\Phi = N\phi = NBS$, kus $\phi = BS$ on voog läbi ühe keeru. See tuleneb järgmisest mõttekäigust: üksikus keerus indutseeritakse emj $d\phi/dt$, aga solenoidi N keerdu on järjestikku, seega emj solenoidi otste vahel on $Nd\phi/dt$, mis peab olema võrdne $d\Phi/dt$, seega $\Phi = N\phi$.

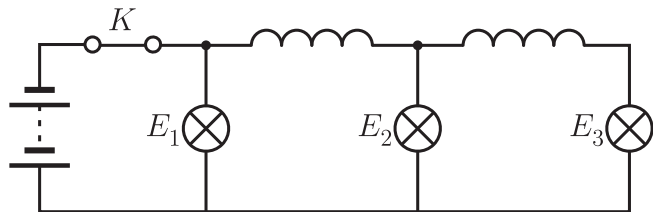
Selleks, et tekitada induktiivsust omavas kontuuris voolu, tuleb teha tööd omainduktsiooni vastu. Tõepoolest,

$$A = \int \mathcal{E} I dt = L \int \frac{dI}{dt} I dt = L \int_0^I I dI = \frac{LI^2}{2}.$$

See töö läheb kontuuri ümbritseva magnetvälja energiaks (magnetvälja energiatihedus on $B^2/2\mu_0$). Seda tähelepanekut võib kasutada kontuuri induktiivsuse hindamiseks, sest magnetvälja tugevust saab hinnata teades voolutugevust ja juhi mõõtmeid.

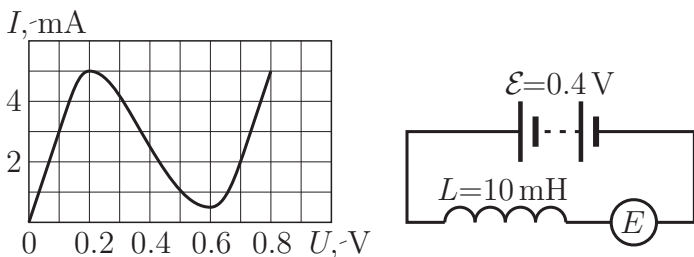
Ül. 102. Joonisel 29 kujutatud elektriskeemis on lüliti K olnud pikemat aega suletud ning kõik hõõglampid põlevad ühesuguse heledusega (poolide aktiivtakistus on tühine). Mitu korda muutuvad lampide võimsused vahetult peale lüliti avamist? Hõõglampe võib käsitleda ül.-s 89 püstitatud mudeli kohaselt.

Vastus: Lambi E_1 võimsus kasvab $2^{8/3} \approx 6,3$ korda, lampide E_2 ja E_3 võimsused jäävad samaks.



Joonis 29: vt. ül. 102

Ül. 103. Mittelineaarne element E lülitatakse elektriskeemi nõnda nagu näidatud joonisel 30. Samas on toodud selle elemendi voltamperkarakteristik. Kuidas hakkab muutuma pingeline sellel elemendil sõltuvalt ajast?

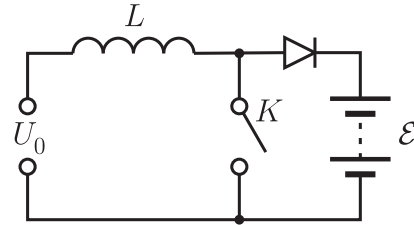


Joonis 30: vt. ül. 103

Ül. 104. Akumulaatorit elektromotoorjõuga $\mathcal{E} = 12$ V laaditakse alalispingeallikast $U_0 = 5$ V joonisel 31 esitatud skee-

mi kohaselt. Pooli induktiivsus $L = 1$ H ja selle aktiivtakistus on tühine. Diiodi võib lugeda ideaalseks. Lüliti K töötab perioodiliselt, olles suletud ajavahemiku τ_1 ja avatud ajavahemiku τ_2 jooksul, kusjuures $\tau_1 = \tau_2 = 0,01$ s. Leidke keskmine laadimisvoolu tugevus.

Vastus: $I_{\text{kesk}} = \frac{U_0^2 \tau_1}{2L(\mathcal{E} - U_0)(\tau_1 + \tau_2)} \approx 8,9$ mA.



Joonis 31: vt. ül. 104

Ül. 105. Leidke solenoidi induktiivsus, kui solenoidi diameeter on palju väiksem tema pikkusest l . Traadi keerdude arv on N ja solenoidi ristlõike pindala S . Solenoid on keritud ferromagnetilisele südamikule, mille suhteline magnetiline läbitavus on μ .

Vastus: $L = \mu\mu_0 SN^2/l$.

Ül. 106. Oletades, et solenoidis voolu tekitamiseks tehtud töö $LI^2/2$ läheb magnetvälja energiaks, näidake, et magnetvälja energiatihedus on $B^2/2\mu_0$.

Ül. 107. Hinnake pikkust l omava sirgjuhtme induktiivsust, kui traadi raadius on a .

Vastus: $L \sim \mu_0 l \ln(l/a)$.

5.3 Vastastikune induktsioon

Kui kaks voolukontuuri paiknevad ruumiliselt lähedastikku, siis vool ühes kontuuris tingib vooluga võrdelise magnetvoo nii läbi iseenda kui ka läbi teise kontuuri: $\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$, $\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{21} I_1$. Järelikult voolu muutumine ühes kontuuris indutseerib emj ka teises kontuuris. Selliseid kontuure nimetatakse sidestatuiks. Ülesande 108 lahendus näitab, et vastastikused induktiivsused on võrdsed, $L_{12} = L_{21}$, seetõttu tähistame neid edaspidi ühe ja sama tähega M . Vastastikuse induktiivsuse arvutamiseks piisab kui me oskame leida magnetvoo läbi ühe kontuuri tingituna voolust teises kontuuris.

Kui meil on tegu ühisele südamikule keritud poolidega, siis maksimaalse sidestatuse puhul läbib ühesugune magnetvoog kumbagi mähist (siin me räägime magnetvoost läbi ühe keeru, $\phi = BS$). Järelikult nendes mähistes indutseeritud elektromotoorjõud on üheselt seotud.

Ül. 108. Näidake, et vastastikused induktiivsused L_{12} ja L_{21} on alati võrdsed. *Juhtnõör.* Leidke sidestatud kontuuride energia, kui nendes voolavad voolud I_1 ja I_2 . Selleks arvutage töö, mida peavad tegema nendes kontuuridesse lülitatud vooluallikad, selleks et tekitada sellised voolud. Näidake, et tulemus on ühene ainult tingimusel $L_{12} = L_{21}$.

Ül. 109. Näidake, et $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$, kus L_1, L_2 on sidestatud kontuuride (oma)induktiivsused. *Juhtnõör.* Näidake, et

$M > \sqrt{L_1 L_2}$ korral satume vastuollu energia jäävusega, nimelt et voolu suurendamine ühes kontuuridest indutseerib selles kontuuris emj, mis soodustab voolu edasist kasvamist ($\mathcal{E}_1 dI_1 > 0$).

Ül. 110. Toroid kujutab endast peenikest juhett, mis on tihedalt keritud rõngakujulisele karkassile. Olgu karkassi keskringjoone raadius R , mähisekeru raadius r (kusjuures $r \ll R$) ning mähise keerdude arv N . Piki toroidi telge jookseb ühtlane sirge juhe. Leidke toroidi ja sirgjuhtme vastastikune induktiivsus. Tõestage antud süsteemi jaoks võrduse $L_{12} = L_{21}$ kehtivus.

Vastus: $M = \mu_0 N r^2 / 2R$.

Ül. 111. Leidke kahe ühisele toroidaalsele südamikule keritud pooli vastastikune induktiivsus. Esimese pooli mähisel on N_1 kerdu, teisel poolil N_2 kerdu. Südamiku pikkus on l , ristlõikepindala S ning suhteline magnetiline läbitavus μ .

Vastus: $M = \mu \mu_0 N_1 N_2 S / l$.

Ül. 112. Ühisele ferromagnetilisele südamikule on keritud kaks pooli. Esimeses mähises on N_1 kerdu, teises N_2 kerdu, kusjuures $N_2/N_1 = n$. Mähiste aktiivtakistused on tühiised. Teise mähise otsad ühendatakse takistiga R , seejärel lülitatakse esimese mähise väljaviikude külge alalispingeallikas pingega U . Leidke takistil eralduv võimsus.

Vastus: $P = n^2 U^2 / R$.

5.4 Ekstremaalne vool induktoris ja ekstremaalne pingeline kondensaatoril

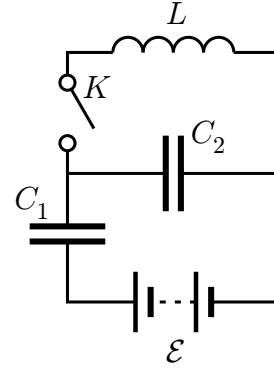
Kui induktoris on vool saavutanud ekstreemalse väärtuse, siis $dI/dt = 0$ ja järelikult indutseeritud emj on null. Kui kondensaatoril on pingeline ekstremaalne, siis $dU/dt = 0$ ja seega vool läbi kondensaatori on null.

Ül. 113. Kondensaatorit mahtuvusega C laetakse üle induktori ja diodi alaliselektromotoorjõu allikast \mathcal{E} . Elektromotoorjõu allika sisetakistus ja pooli aktiivtakistus on tühiised. Milliseks kujuneb pingeline kondensaatoril kui alghetkel oli kondensaatori laeng null? Võib lugeda, et diod avaneb täielikult kui $U > U_d$ ja on lõpmata suure takistusega kui $U < U_d$ (joon. 23). *Vihje.* Siin läheb tarvis ka ideed jaotisest 4.1.

Vastus: $U = 2(\mathcal{E} - U_d)$.

Ül. 114. Joonisel 32 kujutatud elektriskeemis on kondensaatorid C_1 ja C_2 laadunud alalispingeallika \mathcal{E} toimel. Nüüd suletakse lüliti K . Milline on a) maksimaalne voolutugevus I_{\max} läbi pooli ja b) maksimaalne pingeline U_{\max} kondensaatoril C_1 , mis saavutatakse pärast lüliti sulgemist? *Vihje.* Viimasele küsimusele vastamiseks tuleb tähele panna, et kui kondensaatoril C_1 on pingeline maksimaalne, siis kondensaatoril C_2 peab ta olema minimaalne kuivõrd nende pingete summa on konstant (võrdne \mathcal{E} -ga).

Vastus: a) $I_{\max} = \frac{C_1 \mathcal{E}}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}$; b) $U_{\max} = \mathcal{E} \left(1 + \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)$.



Joonis 32: vt. ül. 114

6 Vahelduvvooluahelad

6.1 Kompleksmeetod

Eespool leidsime, et kondensaatori ja induktiivpooli käitumist kirjeldavad võrrandid 5 ja 6. Nendel võrranditel on olemas lahendid, kus nii pingeline kui ka vool muutuvad siinuseliselt: $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$, $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$. Kondensaatori puhul saame tingimuse $I_0 = U_0 \omega C$ ja $\phi = \pi/2$, induktori puhul aga $I_0 = U_0 / (\omega L)$ ja $\phi = -\pi/2$, st kondensaatoris vool edestab pinget faasis 90° võrra, induktoris aga jääb 90° võrra maha. Kondensaatori ja induktori (või nende kombinatsiooni) takistus on reaktiivne, st soojust ahelas ei eraldu ($\pm 90^\circ$ faasinihkest järeldub, et $\langle UI \rangle = 0$).

Kui vahelduvvooluahelas on kaks elementi järjestikku või rööbiti, tekib vajadus siinuslainete liitmise järele. Sama sagedusega siinuslainete summa on samuti siinuslaine, võimaliku faasinihke tõttu tulevad aga valemid üpris keerukad:⁸

$$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

kus

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\cos \varphi = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) / A.$$

Siinuslainete liitmiseks kasneva tehnilise töö lihtsustamiseks paneme tähele, et suurusele $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ võib kompleksstasandil vastavusse seada vektori⁹ $\tilde{x} = A e^{i\phi}$, nii et siinuslainete liitmine asendub vastavate kompleksarvude liitmiseks:

$$A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \rightarrow A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}.$$

Edasi vaatame, kuidas teiseneb aja järgi võetud tuletis:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) = A\omega \cos(\omega t + \phi + \pi/2) \rightarrow iA\omega e^{i\phi},$$

sest $e^{i\pi/2} = i$. Niisiis tuletise võtmine asendub korrutamiseks suurusega $i\omega$. Seega diferentsiaalvõrrandid 5 ja 6 asenduvad kompleksesituses algebraalsete seostega, mis on sarnased Ohmi seadusega:

$$\tilde{I} = i\omega C \tilde{U}, \quad \tilde{I} = \frac{1}{i\omega L} \tilde{U}.$$

⁸Need valemid võib tuletada vaadeldes liidetavaid laineid kui vektoreid, mis pöörlevad ümber koordinaatistiku alguspunkti ringsagedusega ω .

⁹Et eristada valemis reaalseid füüsikalisi suurusi vastavatest komplekssetest suurustest, asetame viimaste kohale märgi $\tilde{}$ (tilde).

Järelikult kondensaatorile ja induktorile tuleb sellises skeemis omistada imaginaarne takistus (e. impedants):

$$\tilde{Z}_L = i\omega L, \quad \tilde{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

Aktiivtakistit kirjeldav võrrand jääb endiseks: $\tilde{U} = R\tilde{I}$. Impedantsidega ning komplekssete voolude-pingetega võib nüüd opereerida nii nagu oleks tegu alalisvooluahelaga.¹⁰

Kui mingi elektri ahela reaalne vahelduvvoolutakistus on Z ja faasinihe pinge ja voolu vahel $\Delta\phi$, siis selle ahela impedants avaldub kujul $\tilde{Z} = Ze^{i\Delta\phi}$. Ja vastupidi, kui oleme kompleksmeetodi abiga \tilde{Z} määranud, siis saame $Z = |\tilde{Z}|$ ja $\Delta\phi = \arg \tilde{Z}$. Üle perioodi keskmistatud aktiivvõimsus, mis eraldub sellel ahelalõigul, avaldub

$$P = \frac{1}{2}U_0I_0 \cos \Delta\phi = \frac{1}{2}\text{Re}(\tilde{U}\tilde{I}^*),$$

kus U_0 ja I_0 on pinge ja voolu amplituudväärtused (efektiivväärtuste kasutamisel tuleb kordaja $1/2$ ära jätta).

Kuna vastastikuse induktiooni näol on samuti tegemist lineaarse protsessiga (indutseeritud emj on võrdeline voolu muutumise kiirusega), siis kompleksmeetod on rakendatav ka induktiivselt sidestatud voolukontuure (nt trafosid) sisaldavate elektri ahelate analüüsimisel. Eelnenuga analoogiliselt valem $\mathcal{E} = -MdI/dt$ omandab siinuliste protsesside puhul kompleksesituses algebralise kuju $\tilde{\mathcal{E}} = -iM\omega\tilde{I}$.

Ül. 115. Jootekolb võimsusega 30 W on arvestatud 220 V võrgupingele. Kui suure mahtuvusega kondensaator tuleks küttekehaga järjestikku ühendada, et küttekeha võimsus kahaneks väärtuseni 20 W? Küttekeha takistuse sõltuvust temperatuurist mitte arvestada.

Vastus: $C \approx 2,8 \mu\text{F}$.

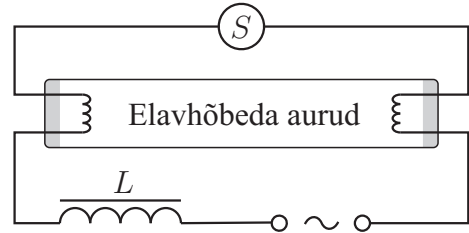
Ül. 116. Lumineestsentslamp lülitatakse vooluvõrku nii, nagu näidatud joonisel 33. Võrgusagedus on 50 Hz ja -pinge 228,5 V. Voolutugevus ahelas on 0,60 A, pinge lambil 84 V, ballastpooli oomiline takistus 26,3 Ω . Lumineestsentslampi võib vaadelda kui oomilist takistust. Starter S kujutab endast lülitit, mis sulgub lambi sisselülitamisel, kuid avaneb peagi ning jääb lambi põlemise ajal avatuks. a) Kui suur on pooli induktiivsus L ? b) Leidke pinge ja voolu vaheline faasinihe $\Delta\phi$. c) Kui suur aktiivvõimsus P eraldub ahelas? d) Mõnikord on tarvilik kompenseerida voolu reaktiivset komponenti, mis tekib paljude lumineestsentslampide üheaegsel kasutamisel. Kui suure mahtuvusega kondensaator tuleks pooliga järjestikku lülitada, et muuta faasinihe vastupidiseks?

Vastus: a) $L = 1,09 \text{ H}$; b) $\Delta\phi = 64,1^\circ$; c) $P = 59,9 \text{ W}$; d) $C = 4,6 \mu\text{F}$.

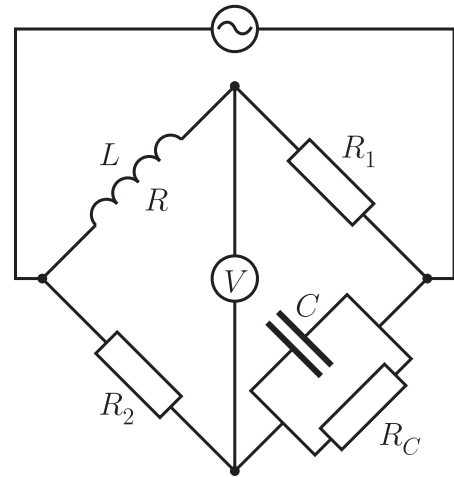
Ül. 117. Joonisel 34 on kujutatud nn. Maxwelli sild, mida kasutatakse induktori induktiivsuse L ja aktiivtakistuse R määramiseks. Selleks timmitakse takisteid R_1 , R_2 , R_C ning kondensaatorit C seni kuni voltmeetri V näit saab nulliks. Avalda L ja R suuruste R_1 , R_2 , R_C ja C kaudu.

Vastus: $L = R_1R_2C$, $R = R_1R_2/R_C$.

Ül. 118. Joonisel 35 on kujutatud lülitus, mille abil on võimalik muuta vahelduvsignaali faasi. Näidake, et tühise väl-

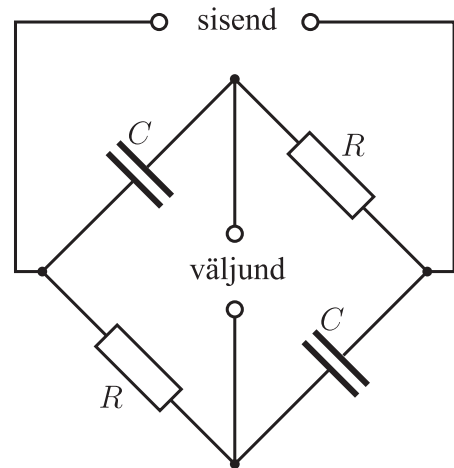


Joonis 33: vt. ül. 116



Joonis 34: vt. ül. 117

jundvoolu puhul on väljundpinge suuruselt sama mis sisendis, ent faasinihkega $2 \arctan(\omega RC)$.¹¹



Joonis 35: vt. ül. 118

Ül. 119. Seosed trafo primaar- ja sekundaarmähise pingete ja voolude vahel on üldjuhul üpris keerulised. Reaalsed trafod on aga sageli lähedased nn ideaalsele trafole, mille puhul eeldatakse järgmist. 1) Mähiste induktiivsused L_1 ja L_2 on väga suure väärtusega; 2) Primaar- ja sekundaarmähise sidestatus on maksimaalne; 3) Mähiste aktiivtakistused on tühised; 4) Kaod südamikus (hüsterees+pöörisvoolud) on tühised. Näi-

¹⁰Kompleksarve võib kirjeldatud viisil rakendada üldse mistahes lineaarsetes süsteemides toimuvate ostsillatsioonide analüüsil, nt valguslainete interferents optikas, vaba- ja sundvõnkumised mehaanikas jne.

¹¹Või $2 \arctan(-1/\omega RC)$, sõltuvalt sellest, kuidas sisendi ja väljundi polaarsuste vahetada määratleda.

dake, et sel juhul kõik voolud ja pinged on samas faasis ja kehtivad lihtsad seosed

$$\frac{U_2}{U_1} = n \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{n},$$

kus n on sekundaar- ja primaarmähise keerdude arvu suhe (trafo ülekandegur).

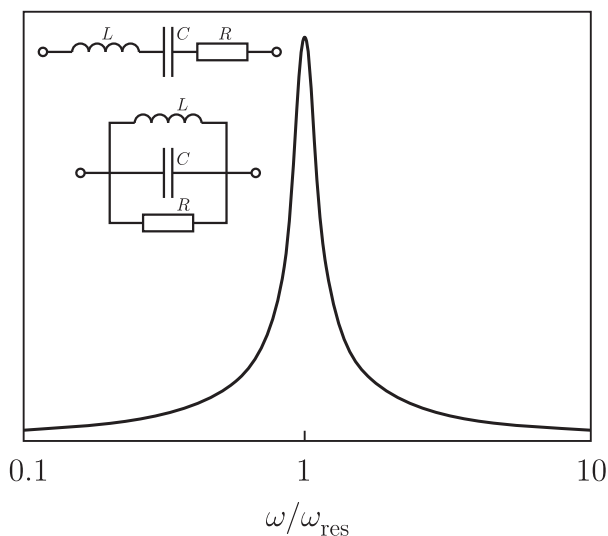
6.2 Resonants LC -ahelas

LC -ahela resonants leiab aset sagedusel $\omega_{\text{res}} = 1/\sqrt{LC}$. LC -järjestikahela impedants saab sagedusel ω_{res} nulliks kuna pinged kondensaatoril ja induktoril on amplituudi poolest võrdsed ent vastandfaasis (nn pingeresonants). LC -rööpahela impedants kasvab sagedusel ω_{res} lõpmata suureks kuna voolutugevused läbi kondensaatori ja induktori on amplituudi poolest võrdsed ent vastandfaasis (nn vooluresonants).

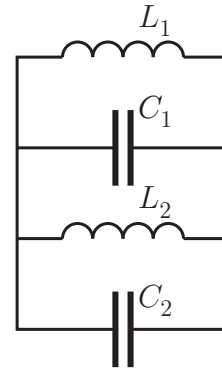
LCR -ahelate puhul jääb kehtima eelpoolöeldu, ainult et $1/Z$ või Z omavad ka ω_{res} juures lõplikku väärtust ja nende sagedussõltuvus näeb ligikaudu välja selline nagu kujutatud joonisel 36.

Vabavõnkumistel kinnises LC -ahelas kondensaator ja induktor vahetavad perioodiliselt energiat. Neil hetketel, kui $U = 0$, on kogu energia kätketud induktori magnetvälja. Kui $I = 0$, on kogu energia kätketud kondensaatori elektrivälja.

Ül. 120. Joonisel 37 kujutatud LC -ahelas $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 20$ mH, $C_1 = 10$ nF ja $C_2 = 5$ nF. Teatud hetkel oli voolutugevus poolis L_1 võrdne $I_{10} = 0,1$ A ja pinge kondensaatoril C_1 oli samal hetkel $U_0 = 40$ V. Milline on vooluvõnkumiste amplituud poolis L_2 ?



Joonis 36: Resonants LCR -ahelas. Ordinaatteljel on $1/Z$ LCR -järjestikahela puhul ja Z LCR -rööpahela puhul. Toodud resonantsikõver vastab juhule $(1/R)\sqrt{L/C} = 6$.



Joonis 37: vt. ül. 120.

7 Laetud osakeste liikumine elektri- ja magnetväljas

7.1 Laetud osakeste liikumine vaakumis

Jaotises 2.4 me juba mainisime, et magnetväli \mathbf{B} mõjub kiirusega \mathbf{v} liikuvale punktlaengule q Lorentzi jõuga $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. On kerge näha, et muude tungide puudumisel liigub osake homogeenses magnetväljas üldjuhul mööda krüvijoont. Vaatleme laetud osakese q liikumist vabas ruumis, kus eksisteerivad üheaegselt nii elektri- kui ka magnetväli. Sellise situatsiooni analüüsimisel võivad kasuks tulla järgmised tähelepanekud.

1. Lorentzi jõud ei tee tööd (sest $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$), seega laetud osakese potentsiaalne energia on määratud ainult elektrivälja jaotusega ruumis.
2. Pöörame koordinaatteljed nõnda, et magnetväli \mathbf{B} oleks rakendatud z -telje positiivses suunas. Newtoni II seadusest ja Lorentzi jõu avaldisest järelduvad osakese jaoks siis järgmised liikumisvõrrandid:

$$\frac{dp_x}{dt} = qE_x + qv_y B, \quad \frac{dp_y}{dt} = qE_y - qv_x B, \quad \frac{dp_z}{dt} = qE_z.$$

Kui nüüd $E_x = 0$ või $E_y = 0$, siis vastavalt $p_x - qyB = \text{Const}$ või $p_y + qx B = \text{Const}$ (peale integreerimist aja järgi). Teisisõnu, säilivad üldistatud impulsid $p'_x = p_x - qyB$ ja $p'_y = p_y + qx B$.

3. Vaatleme laetud osakese liikumist homogeenses magnetväljas \mathbf{B} . Olgu L osakese impulsimoment mingi \mathbf{B} -ga paralleelse telje suhtes. Eeldame, et kõik osakesele mõjuvad tungid peale Lorentzi jõu on nimetatud telje suhtes radiaalsed. Olgu mingil hetkel osakese kaugus teljest r ja radiaalne kiirus v_r . Arvestades, et raadiusvektoriga ristuv Lorentzi jõu komponent on $-qv_r B$, saame $dL/dt = (-qv_r B)r = -\frac{1}{2}qB(dr^2/dt)$ ehk peale aja järgi integreerimist $L = -\frac{1}{2}qB r^2 + \text{Const}$. Järelikult suurus $L + \frac{1}{2}qB r^2$ on osakese mistahes liikumise vältel konstantne.

4. Laengute ja voolude poolt tekitatav väli sõltub sellest, millises taustsüsteemis seda välja vaadeldakse. Näiteks paigalseisev punktlaeng tekitab ainult elektrivälja, aga taustsüsteemis, mis liigub kiirusega \mathbf{v} selle laengu suhtes, registreeritakse lisaks elektriväljale ka magnetvälja (valem 4). Relativistlike kiiruste puhul ka laengu- ja voolutihedused sõltuvad sellest, millises taustsüsteemis neid mõõdetakse

(tuletame relatiivsusteooriast meelde ruumi kontraktsiooni ja aja dilatsiooni nähtusi). Laeng ise, nagu seisumasski, on invariantne.

Olgu meil kaks inertsiaalset taustsüsteemi, mille vastavad koordinaatteljed on paralleelsed. Süsteemi K' alguspunkt liikugu piki x -telge kiirusega u . Defimeerime $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$. Mitterelativistlikul juhul $\gamma \rightarrow 1$. Väljavektorid teisenevad üleminekul $K \rightarrow K'$ järgmise eeskirja kohaselt:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - uB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + uB_y),$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \frac{u}{c^2}E_z), \quad B'_z = \gamma(B_z - \frac{u}{c^2}E_y).$$

Uurides laetud osakeste liikumist elektromagnetväljas, on sageli mõttekas otsida ülesande lahendamiseks selline taustsüsteem, kus mõni väljakomponent on null.

Ül. 121. Elektron kiirusega v liigub homogeenises magnetväljas B , kusjuures $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$. Leidke elektroni trajektoori raadius.

Vastus: $R = mv/(eB)$.

Ül. 122. Elektronide kimp alustab liikumist ühest ja samast ruumipunktist. Elektronide kiirused \mathbf{v} alghetkel on mooduli poolest võrdsed kuid nende suunad hajuvad kuni α suuruse nurga all ruumis tekitatud homogeenise magnetvälja B sihi suhtes, kusjuures $\alpha \ll 1$. Kui suurel kaugusel L nimetatud ruumipunktist toimub elektronide kimbu järjekordne fokuseerumine?

Vastus: $L = 2\pi mv/(eB)$.

Ül. 123. Kaks tasaparalleelset elektroodi (katood ja anood) paiknevad vaakumis üksteisest kaugusel d . Anoodile on rakendatud katoodi suhtes positiivne potentsiaal U . Katoodi pinnalt alustab elektrivälja toimel nullise algkiirusega liikumist elektron. Kui tugev elektriväljaga ristuv magnetväli B tuleb elektrodidevahelises ruumis tekitada, et elektron ei jõuaks enam anoodile?

Vastus: $B = (1/d)\sqrt{2mU/e}$.

Ül. 124. Ruum kahe koaksiaalse silindrikujulise elektrijuhis vahel on õhust tühjaks pumbatud. Sisemise silindri (katoodi) raadius on a , välise silindri (anoodi) sisemine raadius aga b . Anoodile on antud katoodi suhtes positiivne potentsiaal U . Silindritevahelises ruumis on homogeenne magnetväli B , mis on paralleelne silindrite teljega. Katoodi pinnalt alustab elektrivälja toimel nullise algkiirusega liikumist elektron. Leidke B kriitiline väärtus, millest alates elektron ei jõua enam anoodile.

Vastus: $B = \frac{2b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$.

Ül. 125. Elektron algkiirusega \mathbf{v}_0 liigub homogeenises elektri- ja magnetväljas. Vektorid \mathbf{v}_0 , \mathbf{E} ja \mathbf{B} on kõik omavahel risti ja $\hat{\mathbf{v}}_0 = \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{E}}$. Milline on elektroni trajektoor? Keskmise kiirus $\langle v \rangle$? Võib lugeda, et $E/B \ll c$ ja $v \ll c$.

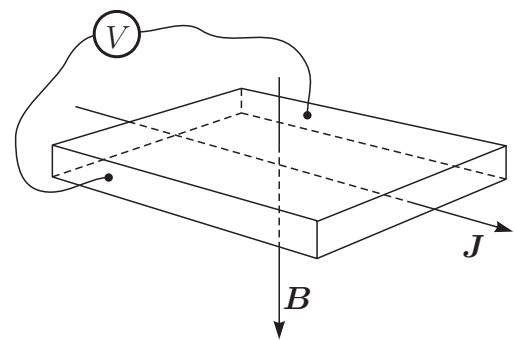
Vastus: $\mathbf{r}(t) = \langle v \rangle t + R \cos(\omega t) \hat{\mathbf{v}}_0 + R \sin(\omega t) \hat{\mathbf{E}}$, kus $R = mv_0/eB$, $\omega = v_0/R = eB/m$ ja $\langle v \rangle = \frac{E}{B} \hat{\mathbf{v}}_0$. Saadud trajektoori nimetatakse tsükloidiks.

7.2 Laengukandjate liikumine elektrijuhis

Sirgvoolust keerukamate voolude korral ei pruugi voolu jaotus olla juhi igas punktis sama (nt radiaalne vool sfäärilises või silindrilises juhis). Detailsemalt võib voolu jaotust iseloomustada *voolutihedusega* \mathbf{J} . \mathbf{J} on vektor, mille moodul võrdub laenguga, mis ajaühikus kandub läbi voolu suunaga risti asetatud ühikpinna, ja mille suund näitab positiivsete laengukandjate liikumise suunda. Ühtlase ristlõikega S juhi puhul ilmselt $J = I/S$. Lihtne arvutus näitab, et \mathbf{J} on määratud laengukandjate kontsentratsiooniga n , laenguga q ja triivikiirusega \mathbf{v} järgmiselt: $\mathbf{J} = qn\mathbf{v}$. (Triivikiirus on laengukandja keskmine kiirus rakendatud välja mõju all.)

Voolutiheduse kasutamisel on mõistlik ka Ohmi, Joule-Lenzi ja Ampere'i seaduse rakendamine diferentsiaalsel kujul. On kerge kontrollida, et \mathbf{J} kaudu omandab Ohmi seadus kuju $\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$, kus ρ on aine eritakistus. Kui juht liigub magnetväljas kiirusega \mathbf{v} , siis elektrijõule lisandub veel Lorentzi jõud, nii et üldisemalt $\mathbf{J} = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})/\rho$. Analoogiliselt leiame, et juhi ühikulises ruumalas dissipeeruv energia avaldub $J^2 \rho$ ja vooluga juhi ühikruumalale mõjuv jõud magnetväljas avaldub $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$.

Vaatleme joonisel 38 kujutatud situatsiooni. Alalisvooluga metall- või pooljuhtplaat on asetatud vooluga risti olevasse magnetvälja B . Triivikiirusega \mathbf{v} liikuvatele laengukandjatele mõjub Lorentzi jõud $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, mis on risti nii \mathbf{J} -ga kui ka \mathbf{B} -ga. Järelikult \mathbf{J} -ga ja \mathbf{B} -ga paralleelsete tahkude peale (mille külge joonisel on ühendatud voltmeeter) hakkavad kogunema laengud. Laengute kogunemine jätkub seni kuni nende poolt tekitatava elektrivälja mõju kompenseerib Lorentzi jõu. Seega jõudsime järeldusele, et magnetvälja toimel tekib plaadis täiendav ristisihiline elektriväli ja vastavate tahkude vahele ühendatud voltmeeter näitab potentsiaalide vahet. Seda nähtust nimetatakse Halli efektiks. Halli efektile on hulk rakendusi (magnetilise induktsiooni mõõtmine, laengukandjate omaduste uurimine pooljuhis jpm).



Joonis 38: Halli efekt.

Ül. 126. Kaks ühesugust metallkera (raadius r) on asetatud homogeenesse juhtivasse keskkonda, mille eritakistus on ρ . Kaugus kerade vahel on hulga suurem nende raadiusest. Kui suur on keradevaheline takistus? *Vihje.* Selle ja järgneva ülesande lahendamisel läheb tarvis ühte ideed jaotisest 3.3.

Vastus: $R = \rho/(2\pi r)$.

Ül. 127. Pooljuhi eritakistuse määramisel on üheks probleemiks kontaktidel tekkivad tundmatud pingelangud. Sellest

probleemist on võimalik üle saada järgmise meetodiga, mida me analüüsime siinkohal lihtsuse huvides poollõpmatu õhukese plaadi jaoks (plaadi paksus h). Olgu selle plaadi serva külge joodetud ridamisi neli kontakti nagu kujutatud joonisel 39. a) Kontaktidest A ja B lastakse läbi vool I . Näidake, et kontaktide C ja D vahele lülitatud voltmeeter näitab pinget

$$U = \frac{I\rho}{\pi h} \ln \frac{(a+b+c)b}{(a+b)(b+c)}.$$

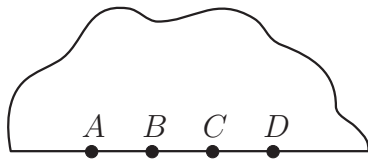
Tähistame suhte U/I sümboliga $R_{AB,CD}$. b) Näidake analoogiliselt, et juhul, kui voolu lastakse läbi kontaktidest B ja C ning pinget mõõdetakse kontaktide A ja D vahel, siis

$$R_{BC,AD} = \frac{\rho}{\pi h} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{ac}.$$

c) Näidake, et

$$\exp(\pi h R_{AB,CD}/\rho) + \exp(\pi h R_{BC,AD}/\rho) = 1.$$

Saadud seos võimaldab ρ määrata peale suuruste $R_{AB,CD}$ ja $R_{BC,AD}$ mõõtmist. Viimased ei sõltu enam kontaktide takistustest, sest need on hulga väiksemad kui voltmeetri sisetakistus.



Joonis 39: vt. ül. 127

Ül. 128. Järgnevalt kirjeldatava meetodiga on võimalik mõõta materjali eritakistust ilma et oleks tarvis kinnitada kontakte materjali külge. Kettakujuliseks prepareeritud ainetükk asetatakse solenoidi sisemuses tekitatavasse homogeenesse magnetvälja, nii et ketta telg on paralleelne solenoidi teljega. Solenoidi toidetakse vahelduvvooluga sagedusel ω , nii et $B(t) = B_0 \cos \omega t$. Ketta raadius on R ja paksus d . Leidke ketta materjali eritakistus, kui kettas eraldub Joule'i soojus võimsusega P . Märkus. Tarvis võib minna valemit $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1/2$ ja integraali $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$. Vastus: $\rho = \pi R^4 B_0^2 \omega^2 / (16P)$.

Ül. 129. Metallplaat asetseb homogeenesse magnetväljas \mathbf{B} , mis on risti tema pinnaga. Hinnake plaadis indutseeritud pöörivoolude poolt tingitud takistusjõudu, kui plaat liigub kiirusega \mathbf{v} , mis on risti \mathbf{B} -ga. Plaadi pindala on S , paksus d ning materjali eritakistus ρ . Juhtnõör. Hinnangulise vastuse saamiseks on mitu teed. Üks võimalus on kasutada energia jäävust, hinnates pöörivoolude tõttu plaadis tekkivat Joule'i soojust ja arvestades, et see soojus saadakse plaadi kulgliikumise kineetilise energia arvelt.

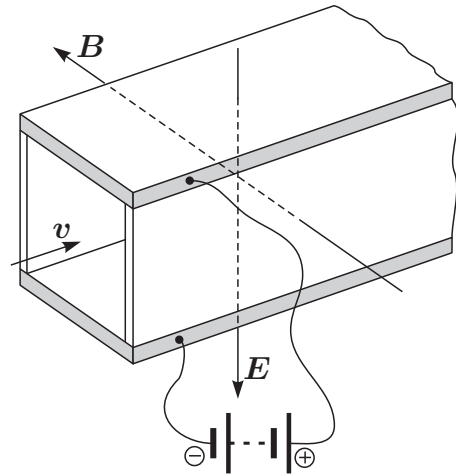
Vastus: $F \sim B^2 v S d / \rho$.

Ül. 130. Leidke Halli efekti tõttu tekkiva ristisihilise elektrivälja tugevus joonisel 38 kujutatud olukorra jaoks. Võib lugeda, et materjal eksisteerib ainult ühte tüüpi laengukandjaid, mille laeng on q ja kontsentratsioon n .

Vastus: $\mathbf{E} = (1/nq)\mathbf{B} \times \mathbf{J}$; seega metallides, kus n on suur, avaldub Halli efekt nõrgalt.

Ül. 131. Pooljuhtseadet, mis Halli efekti vahendusel mõõdab magnetilise induktsiooni väärtust, nimetatakse Halli anduriks. Koosta vattmeetri elektriskeem, kui kasutada on Halli andur, solenoid ja voltmeeter.

Ül. 132. Hea elektrijuhtivusega vedelike pumpamiseks saab kasutada elektromagnetilist pumpa, mille tööpõhimõte selgub jooniselt 40. Vedelik eritakistusega ρ liigub pumbas kiirusega v . Vektorid \mathbf{v} , \mathbf{B} ja \mathbf{E} on kõik omavahel risti. a) Näidake, et vedelikule mõjub tühikulise ruumala kohta jõud $\mathbf{F} = B^2(\mathbf{u} - \mathbf{v})/\rho$, kus $\mathbf{u} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. b) Näidake, et seadme maksimaalne kasutegur küündib 0,5-ni. Võib lugeda, et magnetvälja tekitab püsिमagnet ja ääre-efektid on tühised.



Joonis 40: vt. ül. 132

Ül. 133. Homopolaarne mootor koosneb võllile kinnitatud vaskkettast, mis saab pöörelda homogeenesse aksiaalses magnetväljas B . Vool suundub kettasse läbi võlli ning väljub kettast külpinna kaudu. Võlli raadius on a , ketta raadius b ning ketta paksus h . Ketta materjali eritakistus on ρ . a) Leidke magnetvälja poolt kettale avaldatav pöördemoment M voolutugevusel I ; b) Leidke kettas dissipeeruv Joule'i soojus P voolutugevusel I ; c) Leidke pinge U ketta telje ja serva vahel, kui ketta nurkkiirus on ω ; d) Näidake, et kehtib energia jäävuse seadus kujul $VI = M\omega + P$. Märkus. Ülesanne nõuab paari lihtsa integraali võtmist: $\int x dx = x^2/2$, $\int (1/x) dx = \ln x$.

Vastus: a) $M = BI(b^2 - a^2)/2$; b) $P = I^2 \rho \ln(b/a)/(2\pi h)$; c) $V = \omega B(b^2 - a^2)/2 + I \rho \ln(b/a)/(2\pi h)$.